



Universidad
Carlos III de Madrid

Departamento de Ingeniería Mecánica

PROYECTO FIN DE CARRERA

Análisis dimensional de los modos de vibración de un eje ferroviario

Autor: Miguel Pérez Rodríguez

Tutor: David Mauricio Alba Lucero

Director: Juan Carlos García Prada

Leganés, 19 de Junio de 2012

Título: Análisis dimensional de los modos de vibración de un eje ferroviario

Autor: Miguel Pérez Rodríguez

Tutor: David Mauricio Alba Lucero

Director: Juan Carlos García Prada

EL TRIBUNAL

Presidente: Efrén Díez Jiménez

Vocal: Lara Ogando López

Secretario: M^a Jesús Gómez García

Realizado el acto de defensa y lectura del Proyecto Fin de Carrera el día 19 de Julio de 2012 en Leganés, en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid, acuerda otorgarle la CALIFICACIÓN de

VOCAL

SECRETARIO

PRESIDENTE

Agradecimientos

A toda mi familia por todo el apoyo durante estos años.

Resumen

El contenido del presente proyecto se engloba dentro de los trabajos que se realizan para determinar los modos de vibración de vehículos, estructuras, sistemas y componentes mecánicos, que se encuentran sometidos a cargas dinámicas. Con el objetivo de obtener dichos modos de vibración en muchos casos es necesario recurrir a ensayos, donde se someten a elementos reales a unas condiciones lo más parecidas posibles a las que se van a encontrar cuando estén en servicio. Estos ensayos suelen ser costosos y se realiza en ocasiones una alternativa más económica, que consiste en utilizar en los ensayos modelos a escala e incluso de diferente material a los reales. Esta estrategia se puede utilizar gracias a que a través del análisis dimensional del fenómeno que se estudie en el ensayo, se obtienen las relaciones de semejanza que relacionan las magnitudes entre el ensayo real y a escala.

El objeto de este proyecto es comprobar la validez de la aplicación del análisis dimensional, para la determinación de los modos de vibración de un eje ferroviario a partir de un modelo a escala, utilizando la teoría de vibraciones en vigas esbeltas para determinar las relaciones de semejanza. La estrategia utilizada para la comprobación ha consistido en utilizar el programa de simulación “ABAQUS” para obtener los modos de vibración de un eje ferroviario y los de un eje a escala. Con los modos de vibración de ambos ejes se han calculado las relaciones de semejanza existente entre los resultados y comparados con las relaciones que predice la teoría de vibraciones de vigas esbeltas.

Otro de los propósitos del presente proyecto es una vez comprobada la validez del análisis dimensional para obtener los modos de vibración, valorar si es viable su aplicación en ensayos no destructivos llamados “Process Compensated Resonance Testing” (PCRT). El PCRT es un tipo de ensayo no destructivo basado en la variación de los modos de vibración de un componente mecánico ante la presencia de defectos en el mismo.

Abstract

This work is related to mechanical vibration tests on vehicles, structures, mechanisms or mechanical components which in their service life are under dynamic loads. Vibration tests are realized in order to find modal shapes and natural frequencies. Full scaled tests are extremely expensive, they require facilities and high qualified workers. But here is a cheaper alternative by using scaled tests. It is possible to test scaled models with different size and material that keeps similarity to the real model. That strategy is possible thanks to the dimensional analysis which is a tool to find or check relations among physical quantities by using their dimensions. Dimensional analysis is based on the fact that a physical law must be independent of the units used to measure the physical variables. It allows developing scaling quantities between full scaled models and prototypes.

The purpose of this work is to check the use of dimensional analysis in order to find modal shapes on a railway axle by a scaled model, where scaling quantities are based on the thin beam theory. The strategy used to check that was to calculate modal shapes of a full scaled model and a scaled model by finite element method software “ABAQUS”. Real scaling quantities of modal frequencies are calculated using the results. Then real scaling quantities are compared with theoretic scaling quantities based on the thin beam theory.

Other purpose of this work is to check if theoretic scaling quantities based on the thin beam theory can be used in the non destructive testing technique “Process Compensated Resonance Testing”. That type of non destructive test is based on natural frequencies variation of a mechanical part due to a crack or other kind of defect in it.

Índice general

Contenido

Capítulo 1	19
Introducción y objetivos.....	19
1.1 Motivación	20
1.2 Objetivos	22
1.3 Fases del proyecto	23
1.4 Medios empleados.....	24
1.5 Estructura de la memoria.....	24
1.6 Introducción	25
1.6.1 Vibraciones, ciencia e ingeniería.....	25
1.6.2 Conceptos básicos de las vibraciones.....	28
1.6.3 Análisis dimensional	35
1.6.4 Process Compensated Resonance Testing.....	52
Capítulo 2	56
Desarrollo de la comprobación del análisis dimensional.	56
2.1 Metodología de trabajo.....	57
2.2 Modelo eje-rueda	58
2.2.1 Geometría de los modelos.....	58
2.2.2 Caracterización del modelo eje-rueda	60
2.2.3 Mallado del modelo 1:1.....	62
2.2.4 Mallado del modelo 1:6.....	67
2.3 Condiciones de contorno.....	71
2.3.1 Planteamiento inicial	72
2.3.2 Alternativas en las condiciones de contorno	74
2.3.3 Comparación de resultados y conclusión	95
2.4 Análisis dimensional	96
2.4.1 Desarrollo de las ecuaciones de movimiento y frecuencias naturales de una viga	97
2.4.2 Cálculo de las relaciones de semejanza.....	108
2.4.3 Comparación de las relaciones de semejanza de los modelos y teóricas	113

2.4.4 Resumen de los resultados	116
Capítulo 3	117
Aplicación del análisis dimensional en Process Compensated Resonance Testing.	117
3.1 Planteamiento del problema	118
3.2 Validación de los modelos 1:1 y 1:6	120
3.3 Cálculo y comparación de resultados.....	125
3.3.1 Relaciones de semejanza	125
3.3.2 Diferencia en las frecuencias debido a las fisuras	130
Capítulo 4.....	140
Conclusiones y trabajos futuros.	140
4.1 Conclusiones	141
4.2 Futuros trabajos	142
Bibliografía	144
Anexos.....	145

Índice de figuras

<i>Figura 1 Sistemas de un grado de libertad.</i>	<i>30</i>
<i>Figura 2. Sistemas de tres grados de libertad. [Mechanical vibrations2ª Edición Singiresu S .Rao].</i>	<i>33</i>
<i>Figura 3. Desplazamientos en medio continuo. [Mechanical vibrations2ª Edición Singiresu S .Rao].</i>	<i>33</i>
<i>Figura 4. Modelo geométrico del eje a escala 1:1.....</i>	<i>58</i>
<i>Figura 5.Modelo geométrico de la rueda a escala 1:1.....</i>	<i>60</i>
<i>Figura 6. Modelo eje – rueda escala 1:1</i>	<i>62</i>
<i>Figura 7.Modelo eje-rueda mallado con tamaño de elementos del eje 20 mm y de las ruedas 80 mm.</i>	<i>67</i>
<i>Figura 8. Modelo eje - rueda mallado con tamaño de elementos del eje 3,3 mm y delas ruedas 11 mm.....</i>	<i>71</i>
<i>Figura 9.Representación modo longitudinal 9 sólido libre 442 Hz (sin modos análogos).....</i>	<i>75</i>
<i>Figura 10. Representación modo longitudinal 24 sólido libre.</i>	<i>76</i>
<i>Figura 11. Representación modo longitudinal 31 sólido libre.</i>	<i>77</i>
<i>Figura 12. Representación modo longitudinal 38 sólido libre.</i>	<i>78</i>
<i>Figura 13. Representación modo longitudinal 37 sólido libre.</i>	<i>79</i>
<i>Figura 14. Representación modo longitudinal 50 sólido libre.</i>	<i>80</i>
<i>Figura 15.Representación modo longitudinal 39 sólido libre.</i>	<i>81</i>
<i>Figura 16. Representación modo transversal 8 sólido libre.</i>	<i>82</i>
<i>Figura 17.Representación modo transversal 10 sólido libre.</i>	<i>83</i>
<i>Figura 18. Representación modo transversal 12 sólido libre.....</i>	<i>84</i>

<i>Figura 19. Representación modo transversal 5 deslizante rotación en eje x.....</i>	<i>85</i>
<i>Figura 20. Representación modo transversal 15 sólido libre.....</i>	<i>86</i>
<i>Figura 21. Representación modo transversal 15 sólido libre.....</i>	<i>87</i>
<i>Figura 22. Representación modo transversal 22 sólido libre.....</i>	<i>88</i>
<i>Figura 23. Representación modo transversal 26 sólido libre.....</i>	<i>89</i>
<i>Figura 24. Representación modo transversal 26 sólido libre.....</i>	<i>90</i>
<i>Figura 25. Representación modo torsional 7 sólido libre.</i>	<i>91</i>
<i>Figura 26. Representación modo torsional 17 sólido libre.</i>	<i>92</i>
<i>Figura 27. Representación modo torsional 25 sólido libre.</i>	<i>93</i>
<i>Figura 28. Representación modo torsional 28 sólido libre.</i>	<i>94</i>
<i>Figura 29. Representación modo torsional 16 sólido libre.</i>	<i>95</i>
<i>Figura 30. Diagrama de fuerzas de un elemento de longitud diferencial de una viga sometida a tracción. [Mechanical vibrations2ª Edición Singiresu S .Rao]</i>	<i>97</i>
<i>Figura 31. Diagrama de fuerzas de un elemento de longitud diferencial de una viga esbelta sometida a flexión. [Mechanical vibrations2ª Edición Singiresu S .Rao][1].</i>	<i>100</i>
<i>Figura 32. Diagrama de fuerzas de un elemento de longitud diferencial de una viga sometida a torsión. [Mechanical vibrations2ª Edición Singiresu S .Rao][1].</i>	<i>106</i>

Índice de tablas

<i>Tabla 1. Propiedades de los materiales.</i>	<i>61</i>
<i>Tabla 2. Sistema de unidades utilizado en ABAQUS.</i>	<i>61</i>
<i>Tabla 3. Comparación de frecuencias entre mallas con tamaños de 20 mm y 17 mm.</i>	<i>64</i>
<i>Tabla 4. Comparación de frecuencias entre malla de 20 mm en todo el modelo y malla de 20 mm en el eje y 80 mm en las ruedas.</i>	<i>66</i>
<i>Tabla 5. Comparación de frecuencias entre mallas con tamaños de 3,3 mm y 2,8 mm.</i>	<i>68</i>
<i>Tabla 6. Comparación de frecuencias entre malla de 3,3 mm en todo el modelo y 11 mm en las ruedas.</i>	<i>70</i>
<i>Tabla 7. Comparación de frecuencias modo longitudinal 24 sólido libre.</i>	<i>76</i>
<i>Tabla 8. Comparación de frecuencias modo longitudinal 31 sólido libre.</i>	<i>77</i>
<i>Tabla 9. Comparación de frecuencias modo longitudinal 38 sólido libre.</i>	<i>78</i>
<i>Tabla 10 Comparación de frecuencias modo longitudinal 37 sólido libre.</i>	<i>79</i>
<i>Tabla 11. Comparación de frecuencias modo longitudinal 50 sólido libre.</i>	<i>80</i>
<i>Tabla 12. Comparación de frecuencias modo longitudinal 39 sólido libre.</i>	<i>81</i>
<i>Tabla 13. Comparación de frecuencias modo transversal 8 sólido libre.</i>	<i>82</i>
<i>Tabla 14. Comparación de frecuencias modo transversal 10 sólido libre.</i>	<i>83</i>
<i>Tabla 15. Comparación de frecuencias modo transversal 12 sólido libre.</i>	<i>84</i>
<i>Tabla 16. Comparación de frecuencias modo transversal 5 deslizante rotación en eje x.</i>	<i>85</i>
<i>Tabla 17. Comparación de frecuencias modo transversal 15 sólido libre.</i>	<i>86</i>
<i>Tabla 18. Comparación de frecuencias modo transversal 18 sólido libre.</i>	<i>87</i>
<i>Tabla 19. Comparación de frecuencias modo transversal 22 sólido libre.</i>	<i>88</i>
<i>Tabla 20. Comparación de frecuencias modo transversal 22 sólido libre.</i>	<i>89</i>
<i>Tabla 21. Comparación de frecuencias modo transversal 22 sólido libre.</i>	<i>90</i>

<i>Tabla 22. Comparación de frecuencias torsional 7 sólido libre.</i>	91
<i>Tabla 23. Comparación de frecuencias torsional 17 sólido libre.</i>	92
<i>Tabla 24. Comparación de frecuencias torsional 25 sólido libre.</i>	93
<i>Tabla 25. Comparación de frecuencias torsional 28 sólido libre.</i>	94
<i>Tabla 26. Comparación de frecuencias torsional 16 sólido libre.</i>	95
<i>Tabla 27. Condiciones de contorno en modos longitudinales de una viga [Mechanical vibrations2ª Edición Singiresu S .Rao][1].</i>	99
<i>Tabla 28. Condiciones de contorno en modos transversales de una viga esbelta. [Mechanical vibrations2ª Edición Singiresu S .Rao][1].</i>	105
<i>Tabla 29. Condiciones de contorno en modos torsionales de una viga. [Mechanical vibrations2ª Edición Singiresu S .Rao][1].</i>	108
<i>Tabla 30. Comparación relaciones de semejanza de modos longitudinales.</i>	114
<i>Tabla 31. Comparación relaciones de semejanza de modos transversales.</i>	114
<i>Tabla 32. Comparación relaciones de semejanza de modos torsionales.</i>	114
<i>Tabla 33. Comparación relaciones de semejanza de modos torsionales sólido libre.</i>	115
<i>Tabla 34. Comparación relaciones de semejanza de modos transversales sólido libre.</i>	115
<i>Tabla 35. Comparación relaciones de semejanza de modos torsionales sólido libre.</i>	116
<i>Tabla 36. Comparación de frecuencias refinado de malla modelo 1:1 acero fisura central. ..</i>	121
<i>Tabla 37. Comparación de frecuencias refinado de malla modelo 1:1 acero fisura lateral. ...</i>	122
<i>Tabla 38. Comparación de frecuencias refinado de malla modelo 1:6 aluminio fisura central.</i>	123
<i>Tabla 39. Comparación de frecuencias refinado de malla modelo 1:6 aluminio fisura lateral.</i>	124
<i>Tabla 40. Comparación relaciones de semejanza de modos longitudinales eje con fisura central.</i>	126

<i>Tabla 41. Comparación relaciones de semejanza de modos transversales eje con fisura central.</i>	126
<i>Tabla 42. Comparación relaciones de semejanza de modos torsionales eje con fisura central.</i>	127
<i>Tabla 43. Comparación relaciones de semejanza de modos longitudinales eje con fisura lateral.</i>	127
<i>Tabla 44. Comparación relaciones de semejanza de modos transversales eje con fisura lateral.</i>	127
<i>Tabla 45. Comparación relaciones de semejanza de modos torsionales eje con fisura lateral.</i>	128
<i>Tabla 46. Comparación relaciones de semejanza de modos longitudinales eje con fisura central sólido libre.</i>	128
<i>Tabla 47. Comparación relaciones de semejanza de modos transversales eje con fisura central sólido libre.</i>	128
<i>Tabla 48. Comparación relaciones de semejanza de modos torsionales eje con fisura central sólido libre.</i>	129
<i>Tabla 49. Comparación relaciones de semejanza de modos longitudinales eje con fisura lateral sólido libre.</i>	129
<i>Tabla 50. Comparación relaciones de semejanza de modos transversales eje con fisura lateral sólido libre.</i>	129
<i>Tabla 51. Comparación relaciones de semejanza de modos torsionales eje con fisura lateral sólido libre.</i>	130
<i>Tabla 52. Diferencia de frecuencias debido a la fisura central modelo 1:1 acero.</i>	131
<i>Tabla 53. Diferencia de frecuencias debido a la fisura lateral modelo 1:1 acero.</i>	132
<i>Tabla 54. Diferencia de frecuencias debido a la fisura central modelo 1:6 aluminio.</i>	133
<i>Tabla 55. Diferencia de frecuencias debido a la fisura lateral modelo 1:6 aluminio.</i>	134

Tabla 56. Diferencia de frecuencias debido a la fisura central modelo 1:1 acero sólido libre.

..... 135

*Tabla 57. Diferencia de frecuencias debido a la fisura lateral modelo 1:1 acero sólido libre.*136

Tabla 58. Diferencia de frecuencias debido a la fisura central modelo 1:1 aluminio sólido libre.

..... 137

Tabla 59. Diferencia de frecuencias debido a la fisura lateral modelo 1:1 aluminio sólido libre.

..... 138

Capítulo 1

Introducción y objetivos

1.1 Motivación

Durante el proceso de desarrollo de ingeniería de un sistema mecánico, un proceso de fabricación o bien en proyectos de investigación es necesaria la realización de ensayos. Durante el proceso de desarrollo de un sistema mecánico del cual no se dispone de experiencias previas, posteriormente al diseño y cálculo del mismo es necesario realizar una fase de pruebas. Durante la fase de pruebas se realiza una batería de ensayos sobre un prototipo con el fin de obtener información experimental de su eficiencia, integridad, vibraciones, seguridad etc. Esta información se compara con los objetivos de diseño y retroalimenta el proceso de desarrollo realizando una nueva fase de diseño y cálculo. Se realiza el ciclo las veces que sean necesarias hasta que el sistema mecánico cumple con las expectativas. En procesos de fabricación el funcionamiento es análogo. En cuanto a la investigación la experimentación es su esencia misma ya sea científica o tecnológica.

Durante las últimas décadas el desarrollo de los ordenadores ha modificado la forma en que se realiza un desarrollo en ingeniería. El incremento de su capacidad de computación y su difusión han propiciado el desarrollo de herramientas de simulación en ingeniería. Estas herramientas de simulación han reducido en número de ensayos necesarios en los procesos de desarrollo.

La explicación se encuentra en los altos costes que supone la realización de ensayos. Los prototipos utilizan piezas fabricadas en pequeñas series y no se tiene experiencia en su montaje, lo cual hace que su coste de fabricación sea elevado. Por otro lado las instalaciones y personal cualificado necesarios para la realización de los ensayos también tienen asociado un coste elevado. Estos costes aumentan conforme aumenta la complejidad y tamaño de los prototipos.

Es cierto que las herramientas de simulación han permitido reducir los costes de desarrollo en ingeniería pero no ha sustituido completamente a la realización de ensayos. En aplicaciones que requieren una elevada fiabilidad debido a la seguridad o bien a elevadas pérdidas en caso de fallo se siguen requiriendo la realización de ensayos. Uno de los casos más importantes es la realización de ensayos de vehículos ya sea de pasajeros o mercancías, automóviles o trenes. La seguridad exigida es alta porque están en juego la vida de personas ya sea directamente o bien por el transporte de mercancías peligrosas.

Los ensayos de prototipos tienen dos alternativas. Pueden realizarse a escala real o bien utilizar modelos a escala menor. La ventaja obvia de utilizar modelos a escala es su facilidad de manejo y los menores costes asociados a ellos. Los ensayos con modelos a escala no son una novedad, es de sobra conocido el caso del uso de túneles de viento donde se emplean modelos a escala de aviones, perfiles de ala, edificios etc.

La posibilidad de realizar ensayos a escala se debe a que es posible extrapolar los resultados obtenidos con el modelo a escala al prototipo real. El fundamento teórico que permite realizar esto es el análisis dimensional y su consecuencia el teorema II. Gracias a él se pueden establecer las llamadas relaciones de semejanza, las cuales interconectan las variables de fenómenos semejantes. Sin embargo puede haber desviaciones entre los resultados obtenidos mediante el análisis dimensional y los reales. En parte se debe a simplificaciones que se utilizan y que pueden invalidar los resultados. Dado que los ensayos a escala tienen mucho potencial se hacen esfuerzos por comprobar que los resultados son fiables.

El transporte terrestre está repartido entre los automóviles y el ferrocarril. Aunque desde el desarrollo del automóvil el transporte ferroviario ha perdido peso, ha seguido desempeñando un papel importante en el transporte de mercancías en media y larga distancia. A su vez en las grandes ciudades los trenes urbanos en superficie y el suburbano del transporte público son utilizados diariamente por una parte importante de la población.

La perspectiva de futuro del transporte ferroviario es positiva. Debido a la concienciación sobre el impacto ambiental de las actividades humanas, el ferrocarril puede tener un mayor papel en el futuro. El transporte de mercancías a larga distancia por ferrocarril aspira a incrementarse por su eficiencia y las políticas de potenciación del transporte público pueden producir un incremento del uso del ferrocarril. En ambas situaciones la idea subyacente es el ahorro energético y reducción de emisiones atmosféricas. Por otro lado también aspira a tener un mayor papel en el transporte de viajeros de largas distancias gracias a las líneas de alta velocidad. Debido a esta perspectiva de futuro y a las exigencias de seguridad la realización de ensayos en ingeniería ferroviaria van a seguir siendo necesarios en el futuro.

Uno de los aspectos que se analizan en los ensayos de vehículos ferroviarios son las vibraciones. Principalmente las vibraciones afectan a la comodidad de los pasajeros, seguridad de la mercancía, funcionamiento y seguridad del vehículo. Se realizan muchas investigaciones en el desarrollo y optimización de suspensiones que mejoren el confort de los viajeros y garantizar que la mercancía no sufra daños durante el viaje. Por otro lado si se transporta mercancía peligrosa las vibraciones pueden provocar accidentes y se debe tener en cuenta a la hora de elegir la suspensión. Las vibraciones también son fuente de deterioro y mal funcionamiento de los sistemas del vehículo, reduciendo su vida de servicio, necesidad de revisiones y riesgo de accidentes. Las vibraciones están íntimamente relacionadas con la fatiga de los materiales y los accidentes causados por ellos. Dichos accidentes son particularmente peligrosos por su dificultad de predicción y la necesidad de inspecciones caras para prevenirlos. Por estas razones realizan ensayos para obtener información real de las vibraciones.

Un elemento importante en la seguridad de los vehículos ferroviarios son los ejes. Están sometidos a importantes vibraciones debido a las irregularidades de las vías

que les transmiten las ruedas, y es muy importante en la seguridad porque su fallo provoca inevitablemente accidentes catastróficos. De ahí la importancia del estudio de las vibraciones sobre los ejes ferroviarios.

La razón de este proyecto es la necesidad de poder realizar ensayos de vibraciones a un elemento tan importante para la seguridad como los ejes mediante el uso de modelos a escala. Dado que no hay más remedio que obtener información real sobre su comportamiento frente a las vibraciones y se requiere la realización de ensayos, se hace tremendamente útil los ensayos a escala. La reducción de costes que supone, a la larga implica una mayor competitividad de la industria ferroviaria. Pero para que sea posible antes hay que validar que los resultados obtenidos mediante el análisis dimensional son fiables.

1.2 Objetivos

Este proyecto se engloba dentro de los trabajos de validación de las técnicas que emplean ensayos a escala en la investigación de las vibraciones mecánicas en la ingeniería ferroviaria.

El propósito de este proyecto es valorar la viabilidad de la utilización del análisis dimensional, para obtener las relaciones de semejanza de las variables de un fenómeno, entre un modelo a escala y el real. En concreto dicha valoración se pretende realizar en el caso de la obtención de las frecuencias naturales de los modos de vibración de un eje ferroviario. En dicho caso se plantea la realización de un hipotético ensayo, en el que se emplearía un modelo del eje a escala 1:6 para obtener las frecuencias naturales del eje real, a través de las relaciones de semejanza obtenidas mediante un análisis dimensional basado en la teoría vibraciones de vigas esbeltas. Dos de los objetivos de este proyecto es determinar las relaciones de semejanza en base al análisis dimensional basado en la teoría vibraciones de vigas esbeltas y la validez de su uso en la situación mencionada

Una vez demostrada la validez de las relaciones de semejanza obtenidas mediante el análisis dimensional, en el presente proyecto se analiza además en qué medida son utilizables para una aplicación del *Process Compensated Resonance Test* (PCRT). El PCRT aprovecha la diferencia entre las frecuencias naturales de un componente mecánico considerado de referencia y el mismo componente mecánico, que contiene alguna clase de defecto o desperfecto que modifica la rigidez del mismo. Una aplicación del PCRT relacionada con los ejes ferroviarios es su uso como ensayo no destructivo para la detección de fisuras en ellos. Una posibilidad es determinar cómo se desvían las frecuencias naturales según el tamaño de la fisura aumenta. De esta manera al realizar el PCRT sobre un eje en servicio se puede conocer el tamaño de la fisura. Pero para ello se necesita realizar el PCRT en ejes previamente fisurados. Además hay que realizarlo con tantos ejes como lugares altamente susceptibles de desarrollar una fisura y realizarles ensayos con diferentes tamaños de fisura. Por lo que la realización de ensayos a escala es una posibilidad interesante. En este apartado se plantea la

posibilidad de realizar un ensayo con modelo del eje a escala 1:6 con una fisura inducida y con otro eje a escala 1:6 sin defecto, para conocer la desviación de las frecuencias debido a la fisura. Conocida la desviación se utilizarían las relaciones de semejanza del apartado anterior para obtener la desviación de las frecuencias en el eje real. El último objetivo del proyecto es estudiar la validez del uso de las relaciones de semejanza calculadas y comprobadas en el apartado anterior con dicho propósito.

Resumiendo lo expresado anteriormente los objetivos del presente proyecto son:

- Determinar las relaciones de semejanza entre las frecuencias de los modos de vibración de un eje ferroviario a escala 1:6 y el eje real utilizando el análisis dimensional basado en la teoría vibraciones de vigas esbeltas.
- Comprobar la fiabilidad de las frecuencias naturales de los modos de vibración de un eje ferroviario, obtenidas a partir de un ensayo realizado a un modelo del eje a escala 1:6 utilizando las relaciones de semejanza calculadas anteriormente.
- Valorar si son utilizables las relaciones de semejanza calculadas anteriormente, para conocer las desviaciones de las frecuencias naturales de un eje debido a la presencia de una fisura, a partir de las desviaciones de las frecuencias naturales en un modelo del eje a escala 1:6.

1.3 Fases del proyecto

Todos los trabajos realizados en el proyecto se pueden organizar en función de en que etapas o fases se han desarrollados. A continuación se presenta una relación de fases en las que se divide el proyecto y los trabajos asociados a ellas.

- **Fase de creación de los modelos a escala 1:1 y 1:6.** En esta fase se han realizado los trabajos necesarios para crear los modelos geométricos de los ejes mediante el programa de CAD “*solid edge*”. También se incluyen en esta fase las labores de adecuación de malla y definición de condiciones de contorno, necesarias para poder realizar análisis de los modelos en el programa de elementos finitos “ABAQUS”.
- **Desarrollo teórico de las relaciones de semejanza teóricas.** En esta fase se engloban los desarrollos de las expresiones de las relaciones de semejanza basadas en la teoría de vibraciones para vigas esbeltas.
- **Cálculo y comparación de las relaciones de semejanza con el fin de valorar la validez de la aplicación del análisis dimensional.** Se han calculado con “ABAQUS” los modos de vibración de los modelos a escala 1:1 y 1:6 desarrollados anteriormente. Con los resultados se han obtenidos las relaciones de semejanza existentes entre ambos modelos y se han comparado con las relaciones de semejanza teóricas.

- **Cálculo de la desviación de las frecuencias naturales debido a la presencia de fisuras y valoración del uso análisis dimensional** Esta es la última fase del proyecto y en ella se ha modificado los modelos a escala 1:1 y 1:6 incluyéndoles una fisura. Se han calculado con “ABAQUS” nuevamente los modos de vibración de los modelos con fisura y se han comparado los resultados con los de los modelos sin fisura. En esta fase se valora si el análisis dimensional basado en las relaciones de semejanza teóricas, es válido para conocer dichas desviaciones a partir de los resultados de modelos a escala.

1.4 Medios empleados

Durante la realización de este proyecto se ha requerido el uso de diversas herramientas y documentación las cuales se enumeran a continuación:

- **Solid Edge.** Esta herramienta de CAD ha sido utilizada para la creación de la geometría de los modelos a escala 1:1 y 1:6. Versión 17.
- **ABAQUS.** Es la herramienta informática de elementos finitos utilizada para obtener los modos de vibración y sus frecuencias de los distintos modelos utilizados en el presente proyecto. Versión 6.10
- **Paquete Office.** Aplicaciones como Word Excel o Power point han sido empleadas en la realización de este proyecto. Versión Office 2007 12.0.4518
- **Documentación.** Se ha utilizado documentación e información de diversas fuentes. Dichas fuentes están recogidas en la bibliografía.

1.5 Estructura de la memoria

La documentación de la memoria está estructurada en capítulos y secciones de la siguiente manera:

- **Capítulo primero.** En este capítulo se expone la motivación de la realización del presente proyecto, junto con los objetivos del mismo. En este capítulo también se introducen los conceptos de las disciplinas abordadas a lo largo de la memoria: vibraciones mecánicas, análisis dimensional y la técnica *Process Compensated Resonance Test (PCRT)*.
- **Capítulo segundo.** En el segundo capítulo se aborda todo lo relacionado con la comprobación de la validez del análisis dimensional. Se presenta el desarrollo de los modelos geométricos a escala real y a escala 1:6, junto con la selección de las condiciones de contorno. Están presentes en este capítulo el desarrollo teórico de las relaciones de semejanza basadas en la teoría de vibraciones para

vigas esbeltas. Por último incluye se presentan las frecuencias naturales de los modelos obtenidos mediante “ABAQUS”, los cálculos de las relaciones de semejanza con dichas frecuencias y su comparación con las teóricas.

- **Capítulo tercero.** Este es el último capítulo y está dedicado al PCRT. Se presentan en el las modificaciones realizadas a los modelos a escala real y a 1:6 al incluirle una fisura, junto con la validación de los nuevos modelos resultantes. Se muestran las frecuencias naturales de los nuevos modelos y la comparación con las de los modelos originales, con el propósito de observar su variación. Por último figura la valoración del análisis dimensional aplicado al PCRT.
- **Capítulo cuarto.** Se expresan las conclusiones y valoraciones sobre los objetivos propuestos, junto con las recomendaciones para futuros trabajos.
- **Bibliografía.** Recopilación de las distintas fuentes utilizadas en la realización del proyecto
- **Anexos.** Documentación e información adicional.

1.6 Introducción

1.6.1 Vibraciones, ciencia e ingeniería

Las vibraciones mecánicas han sido objeto de interés desde tiempos antiguos. Inicialmente ese interés estuvo motivado por los instrumentos musicales de cuerda o tambores. Más adelante empezó a cobrar interés desde el punto de vista del conocimiento natural. Uno de los primeros análisis racionales sobre el tema lo hizo Galileo. Él descubrió la relación existente entre la longitud de un péndulo y su frecuencia de oscilación. También fue él el que observó y señaló la relación entre densidad, tensión, longitud y la frecuencia natural de vibración de un cable. Galileo sentó parte de las bases del estudio científico de las vibraciones mecánicas. Hasta ese momento la relación entre el sonido y las vibraciones mecánicas no era comprendida con claridad.

A partir de entonces matemáticos y científicos como Taylor, *Bernoulli*, *D'Alembert*, *Euler*, *Lagrange* o Fourier contribuyeron al desarrollo de la teoría de vibraciones. *Wallis* y *Sauveur* observaron independientemente el fenómeno de los modos de vibración en cuerdas. Ellos demostraron que la frecuencia del segundo modo de vibración era el doble que la del primer modo y que la del tercer modo era el triple. *Sauveur* fue el primero en asignar la denominación de “fundamental” a la frecuencia natural más baja y “armónicas” a las demás. Más tarde *Bernoulli* propuso el principio de superposición lineal de los armónicos [1].

Después de que se enunciara la ley de *Hooke* de la elasticidad en 1676, *Euler* y *Bernoulli* obtuvieron la ecuación diferencial que gobierna las vibraciones transversales de piezas prismáticas, e investigaron la solución para pequeñas deformaciones. Ya en 1784 *Coulomb* hizo estudios sobre las vibraciones torsionales de un cilindro metálico suspendido por un cable.

Después de que se sentaran estos descubrimientos iniciales, empezó a existir un interés creciente no solo desde un punto de vista científico si no también práctico. Los sistemas mecánicos y estructuras han sido utilizados desde incontables siglos, pero desde el comienzo de la revolución industrial su uso y desarrollo recibieron un empuje renovado. El interés en su estudio y comprensión no se quedó atrás. Los conocimientos científicos desarrollados en los siglos previos fueron aplicados con este fin y los conocimientos sobre vibraciones mecánicas no fueron una excepción. En 1877 *Rayleigh* publicó el libro *Teoría del sonido*, que es considerado uno de los libros básicos de vibraciones. Entre sus contribuciones está el método de la conservación de la energía para el cálculo de las frecuencias. En 1909 *Frahm* propuso un sistema absorbedor de vibraciones, que consistía en incluir en el sistema un conjunto masa elemento elástico que sin necesidad de un elemento disipativo minimizaba las vibraciones de la masa principal. En tiempos más recientes son destacables las contribuciones a la teoría de vibraciones de *Stodola*, *Timoshenko* y *Mindlin*. *Stodola* desarrolló un método de análisis de vibraciones en vigas que se aplicó al estudio de vibraciones en los álabes de turbinas. Los trabajos de *Timoshenko* y *Mindlin* ampliaron las teorías de vibraciones de vigas y placas.

Es conocido que muchos de los problemas básicos de la mecánica, incluidas las vibraciones son no lineales. A pesar de ello se han abordado de forma lineal con bastante éxito en muchos casos pero no en todos. En sistemas no lineales tiene lugar a veces fenómenos que no pueden existir en sistemas lineales. El desarrollo matemático de las vibraciones no lineales se inició a finales del siglo XIX con *Poincaré* y *Lyapunov*. Después de 1920 los trabajos de *Duffing* y *van der Pol* dieron las primeras soluciones definidas de la teoría de vibraciones no lineales y mostraron su importancia en la ingeniería

En el mundo hay numerosos fenómenos en los que aparecen características aleatorias, como por ejemplo terremotos, el viento o ruido de cohetes y reactores. Para el análisis de este tipo de problemas se ha hecho necesario el desarrollo de conceptos y métodos de análisis específicos. A pesar de que *Einstein* consideró el movimiento Browniano un caso particular de vibración aleatoria en 1905, no se desarrollaron aplicaciones hasta 1930. La introducción de la función de correlación de *Taylor* en 1920 y la densidad espectral por *Wiener* and *Khinchin* a principios de los años treinta abrieron nuevas posibilidades de desarrollo de la teoría de las vibraciones aleatorias. Los documentos publicados por *Lin* y *Rice* entre 1943 y 1945 allanaron el camino a la aplicación de las vibraciones aleatorias en problemas de ingeniería [1].

Durante buena parte del siglo XX los estudios de vibraciones que abordaban problemas de ingeniería complejos, utilizaban modelos muy simplificados con unos pocos grados de libertad. Gracias al desarrollo de los ordenadores digitales en la década de los cincuenta y a su incremento constante de su capacidad de cálculo, se hizo posible el uso de modelos cada vez más complejos. El desarrollo posterior de los métodos de elementos finitos, permitió a los ingenieros utilizar ordenador para analizar sistemas complejos de miles de grados de libertad en campos como la dinámica vehicular y estructuras.

En la mayoría de las actividades humanas se encuentran presentes las vibraciones de una forma u otra. Un ejemplo evidente es que oímos porque nuestros oídos captan las vibraciones que se transmiten por el aire, hablamos gracias a la vibración de las cuerdas vocales o bien cuando andamos nuestros pies y brazos describen un movimiento oscilatorio. Como se comentó anteriormente los primeros esfuerzos en el campo de las vibraciones se centraron en su comprensión y desarrollo de teorías que explicaran la física de los movimientos vibratorios. Poco a poco estos conocimientos se fueron utilizando en ingeniería y finalmente las propias aplicaciones en ingeniería han motivado parte de las investigaciones de las vibraciones orientadas a diseño de máquinas, estructuras, motores, turbinas etc.

En el mundo de la ingeniería se encuentran multitud de ejemplos en los que están presentes las vibraciones. En motores alternativos por ejemplo la propia naturaleza del mecanismo de funcionamiento, junto con problemas de equilibrado y deficiencias en la fabricación, inducen la aparición de vibraciones. En turbinas las vibraciones causan aparatosos fallos mecánicos. Los ingenieros aún no ha sido capaces de evitar los fallos debidos a vibraciones en los álabes y el rotor de las turbinas. Lógicamente las estructuras diseñadas para soportar máquinas pesadas centrífugas, como los mencionados motores alternativos, turbinas o compresores también están sometidas a vibraciones. En todos estos casos la estructura o el componente mecánico está sometido a cargas dinámicas que provocan vibraciones y pueden sufrir rotura por fatiga debido a las tensiones alternantes que induce el movimiento vibratorio. Además las vibraciones incrementan el desgaste de cojinetes y engranajes e incrementan el ruido producido durante su funcionamiento. En las máquinas las vibraciones provocan que las tuercas se puedan aflojar y liberar uniones. Las vibraciones no solo afectan al funcionamiento operativo de estructuras y máquinas, los procesos de fabricación son sensibles a sus efectos. En operaciones de mecanizado las vibraciones afectan negativamente a las tolerancias alcanzadas en las piezas.

Otra característica de las vibraciones a tener en cuenta en la ingeniería son las frecuencias naturales. Si la frecuencia de las vibraciones que sufre un componente de una máquina o estructura es cercana a la frecuencia natural de los mismos, tiene lugar un fenómeno conocido como resonancia. Cuando entra en resonancia un componente mecánico o estructura las fuerzas que actúan sobre ellos este sufre desplazamientos enormes que o bien impiden su correcto funcionamiento o producen el fallo del mismo. Es fácil encontrar en la literatura relacionada con las vibraciones ejemplos de las

consecuencias negativas que tiene sobre máquinas y estructuras. Debido a las consecuencias que pueden tener las vibraciones se realizan ensayos de vibraciones durante el desarrollo de la mayoría de máquinas.

En ingeniería es común encontrarse con sistemas en los que el ser humano forma parte del mismo, como por ejemplo vehículos. La transmisión de vibraciones a seres humanos implica pérdida de confort y pérdida de eficiencia si opera la máquina. La vibración de paneles indicadores produce fallos en los mismos y problemas para leerlos. El principal propósito de los ensayos es mejorar los diseños para minimizar las vibraciones todo lo posible o al menos dentro de un nivel aceptable. Con esta idea en mente los ingenieros mecánicos intentan diseñar motores o máquinas con sistemas rotativos equilibrados y los ingenieros de estructuras diseñan soportes que aseguren que su efecto no llegue a ser perjudicial.

A pesar de los efectos negativos de las vibraciones también pueden ser útiles. De hecho sus aplicaciones han ido aumentando con el paso del tiempo. Por ejemplo en tolvas, cintas transportadoras, cribadoras, procesos de pulido o tratamiento superficial, aplicación de recubrimientos, liberación de piezas fundidas en moldes de arena, lavadoras etc. También se han empleado para mejorar algunos procesos de fabricación como la forja o soldadura. Además se emplean en simulaciones de terremotos que permitan mejorar la respuesta de los edificios frente ellos, o aumentar la fiabilidad de instalaciones críticas como centrales nucleares, presas, puentes, conducciones, depósitos de combustibles y refinerías, industrias químicas etc.

1.6.2 Conceptos básicos de las vibraciones

Una definición de vibración oscilatoria podría ser todo movimiento que se repita tras un intervalo de tiempo constante. Ese intervalo de tiempo se llama periodo. El movimiento de un péndulo es un ejemplo clásico. La teoría de vibraciones aborda el estudio de movimientos oscilatorios de los cuerpos y las fuerzas asociadas a ellos.

En un sistema oscilatorio o vibratorio se pueden diferenciar ciertos elementos básicos, un elemento que almacena energía potencial (generalmente un elemento elástico o una masa en presencia de un campo gravitatorio), un elemento que almacena energía cinética (una masa o inercia) y un sistema que disipa o extrae energía del sistema.

En un sistema oscilatorio hay un intercambio de energía entre el elemento elástico o potencial y el elemento de inercia alternativamente. Es decir, La energía cinética del sistema se convierte en energía potencial (elástica o gravitatoria) durante la mitad del periodo de la oscilación, y durante la otra mitad la energía potencial se convierte en cinética. El sistema conserva la energía puesto que está aislado y no hay fuerzas exteriores aplicadas. Además las fuerzas internas responsables de los

intercambios energéticos son conservativas. Si en el sistema hay un elemento disipador, tras cada ciclo parte de la energía es disipada, es decir tras cada ciclo la suma de la energía potencia elástica y la energía cinética es menor. Si el sistema está aislado, puesto que consideramos el elemento disipador como parte del sistema) el sistema no ha perdido energía. Pero las fuerzas internas relativas al elemento disipador no son conservativas. Este elemento convierte la energía potencial o cinética en una forma de energía que no es convertible totalmente en la dirección contraria. Esta energía suele ser térmica y las fuerzas disipativas de fricción entre superficies secas o viscosas si hay un fluido. Un sistema oscilatorio con elemento disipativo con el paso del tiempo no tendrá energía cinética o potencial y se detendrá. El mismo efecto se producirá aunque no haya elemento disipativo pero si fuerzas externas al sistema que actúen de forma que extraigan energía del sistema. El efecto contrario ocurriría si las fuerzas externas actuasen de tal forma que suministrasen energía al sistema. Más adelante se explicara en qué condiciones las fuerzas externas realizan la máxima transferencia de energía desde o hacia el sistema.

Imaginemos un péndulo simple formado por una masa m puntual unida al extremo de un cable de longitud l , de masa despreciable y con el otro extremo fijo llamado O . Considerando la vertical como posición de reposo y el ángulo que forma el cable con la vertical el ángulo θ , la masa es desplazada un ángulo θ posición (1). En ese punto la energía cinética es cero. Dado que la masa está en un campo gravitatorio tiene una energía potencial gravitatoria. Para facilitar los cálculos se asumirá que el potencial gravitatorio en la posición de equilibrio, es decir, en la posición más baja que puede alcanzar la masa es cero. Dicho esto la energía potencial en la posición (1) es $mgl(1-\cos \theta)$ respecto a la posición de equilibrio. Cuando se suelta la masa desde la posición (1) la fuerza de la gravedad provoca que m se desplace angularmente entorno a O . Cuando m llega a la posición de equilibrio su energía potencial es cero la cual se ha convertido en energía cinética donde $mgl(1-\cos \theta) = \frac{1}{2}mv^2$. Posteriormente m alcanza el mismo ángulo θ pero negativo al otro lado de la vertical que llamaremos posición (2). En (2) m tiene energía cinética cero pero vuelve a tener energía potencial gravitatoria $mgl(1-\cos \theta)$. En este punto m se mueve en sentido contrario y termina volviendo a la posición (1) y completar una oscilación. La masa m repetirá el ciclo realizando un movimiento oscilatorio. Las oscilaciones se repetirán en ausencia de fuerzas disipativas. En un caso real el sistema del péndulo estaría sometido fuerzas externas al interaccionar con el aire. Estas reducen la energía del sistema convirtiéndola en energía cinética del aire y un incremento de la temperatura. Estas fuerzas “amortiguan” el movimiento oscilatorio hasta detenerse el péndulo en la posición de equilibrio [2].

Otro ejemplo clásico es una masa puntual m unida al extremo de un resorte colocado horizontalmente que tiene el otro extremo fijo en el punto O . En el sistema masa resorte m hace de inercia, que acumula energía cinética y el resorte que es el elemento elástico que almacena energía potencial elástica. En este caso el desplazamiento de m es lineal y la posición de m en el estado de reposo es la referencia espacial con valor $x = 0$. Si se desplaza m respecto de la posición de equilibrio, al igual

que en el péndulo la m no tiene energía cinética. Sin embargo el muelle tiene energía potencial elástica almacenada $\frac{1}{2}mk^2x$. Además el muelle ejerce una fuerza proporcional a la distancia de m respecto de la posición de equilibrio dirigida a esta posición. Al liberar m esta se acelera y alcanza la posición de equilibrio, donde el resorte no tiene energía potencial elástica, la cual es ahora energía cinética en m . La masa m se desplaza hacia el otro lado de la posición de equilibrio donde vuelve a alcanzar velocidad cero y toda la energía cinética se ha convertido en energía potencial elástica. A continuación m volverá a la posición de equilibrio alcanzando velocidad máxima y más tarde de nuevo la posición inicial completando una oscilación. De la misma forma que ocurría con el péndulo m realizará el movimiento oscilatorio indefinidamente a menos que haya presencia de fuerzas externas o elementos disipativos interno en el sistema. En un caso real el sistema perdería energía debida a la interacción con el aire o rozamientos con la superficie de apoyo.

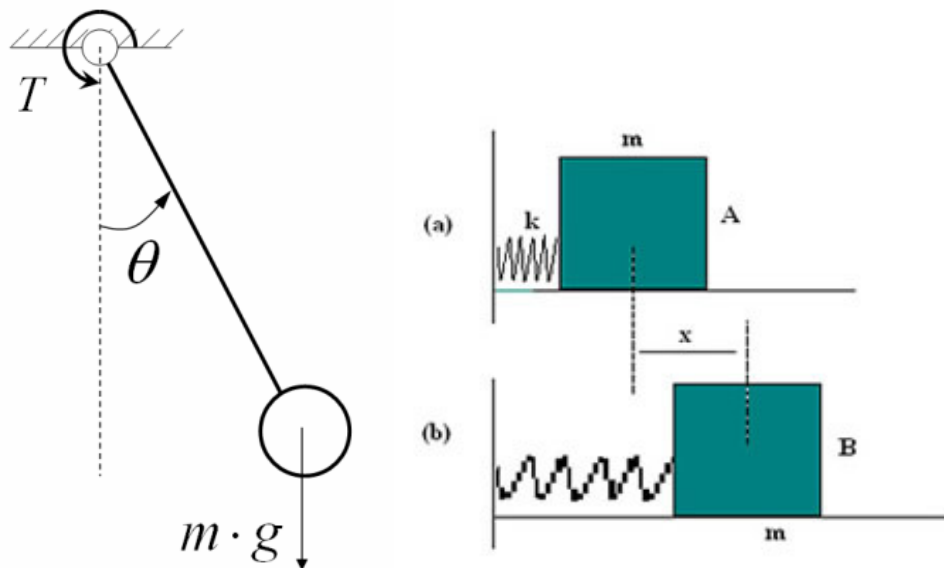


Figura 1 Sistemas de un grado de libertad.

Con estos ejemplos quedan reflejados los intercambios energéticos básicos presentes en un movimiento oscilatorio. Pero aún falta por definir como se desplazan las masas en el tiempo. La ecuación que define el movimiento de la masa en el tiempo se llama modo de vibración y tiene asociado una constante muy importante llamada frecuencia natural

La frecuencia natural es característica de cada sistema. Lo interesante de los ejemplos anteriores, es que independientemente del valor que tomen θ y x en el desplazamiento inicial que le inducimos, la frecuencia de la vibración es la misma. Es decir, el sistema realiza el mismo número de oscilaciones por segundo. Esta frecuencia se la conoce como frecuencia natural del sistema y depende del elemento elástico y la inercia [2].

Para conocer cuál es la frecuencia natural del sistema y como es el desplazamiento de la masa en función del tiempo se plantea la segunda ley de Newton para el sistema en cuestión. Supóngase un sistema como el de la derecha de la Figura 1. Considerando que la posición de la masa en la posición de equilibrio es la ubicación del sistema de referencia $x = 0$, la única fuerza que actúa sobre la masa es la fuerza elástica del muelle:

$$F = -kx$$

Ec. 1

Donde k es la constante elástica del muelle y x el desplazamiento de la masa. Si se aplica la segunda ley de Newton:

$$-kx = m\ddot{x}$$

Ec. 2

$$kx + m\ddot{x} = 0$$

Ec. 3

Donde \ddot{x} es la aceleración de la masa. La Ec. 3 es una ecuación diferencial cuya solución es:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Ec. 4

A es la amplitud del movimiento oscilatorio ω la frecuencia natural del sistema y φ el desfase. La Ec. 4 expresa el desplazamiento de masa en el movimiento vibratorio y se llama modo de vibración. ω es la frecuencia natural del sistema. Esta se determina sustituyendo x y \ddot{x} en Ec. 3:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Ec. 5

Resultando:

$$(-m\omega^2 + k)x = 0$$

Ec. 6

La solución no trivial de la Ec. 6:

$$-m\omega^2 + k = 0$$

Ec. 7

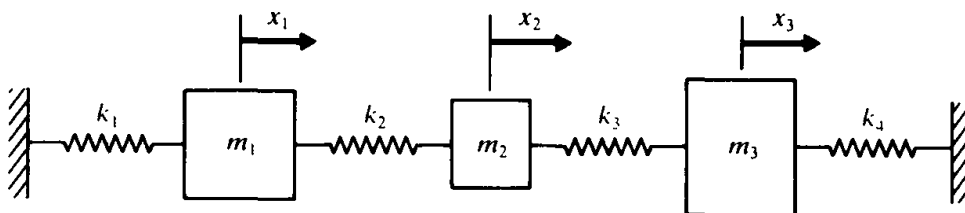
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ec. 8

Resumiendo las expresiones obtenidas, la Ec. 4 es el modo de vibración del sistema y define el desplazamiento de la masa en el tiempo, y la Ec. 8 establece la frecuencia natural asociada a dicho modo de vibración. La constante ϕ es determinada a partir de las condiciones de contorno.

Grados de libertad

Otra característica importante de los sistemas vibratorios son los grados de libertad. Esto se debe a que un sistema tiene tantos modos de vibración como grados de libertad tenga. Se denomina grados de libertad de un sistema al mínimo número independiente de variables necesarias para determinar completamente la posición de todos los elementos de un sistema en un momento dado. El péndulo simple es un sistema de un grado de libertad al igual que la masas y el resorte, porque θ y x definen perfectamente la posición de m es su respectivo caso. Es evidente que la trayectoria de la masa del péndulo no es lineal y que en un sistema cartesiano se necesitan dos coordenadas x e y para definir cada punto de la curva descrita. En un primer momento esto podría sugerir que es un sistema de dos grados de libertad. Pero x e y no son independientes, describen una circunferencia de radio l . La relación la relación entre los puntos de un circunferencia es $x^2 + y^2 = l^2$ por lo que se hace obvio que realmente no tiene dos grados de libertad si no uno.



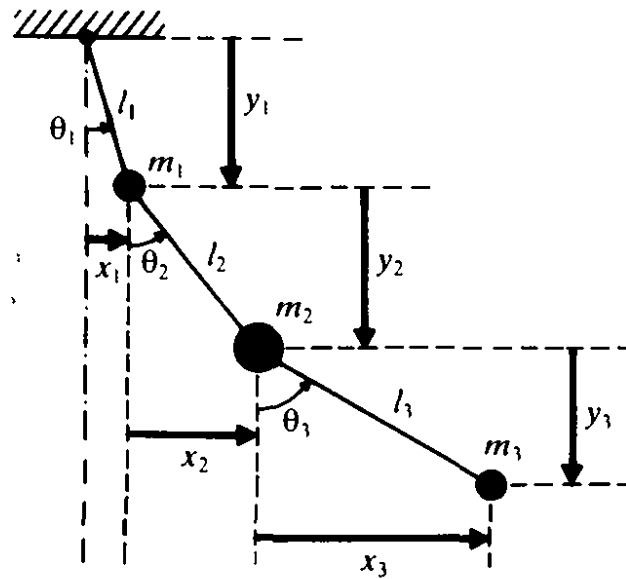


Figura 2. Sistemas de tres grados de libertad. [Mechanical vibrations 2ª Edición Singiresu S. Rao].

Un gran número de sistemas se pueden describir usando un número finito de grados de libertad como los anteriores ejemplos. Sin embargo cuando se analiza un elemento continuo elástico, idealmente se puede considerar que contienen un número infinito de elementos de tamaño diferencial y por tanto infinitos de grados de libertad. Por ejemplo imaginemos una viga empotrada en un extremo. Si la viga tiene un número infinito de elementos de tamaño diferencial se necesitan un número infinito de coordenadas para especificar los desplazamientos de cada uno [3].

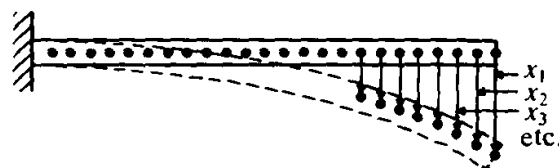


Figura 3. Desplazamientos en medio continuo. [Mechanical vibrations 2ª Edición Singiresu S. Rao]

El conjunto de coordenadas de todos los elementos diferenciales representan la deformada de la viga. Este es un claro ejemplo de sistema con infinito número de grados de libertad. La mayoría de máquinas y estructuras están compuestas por elementos elásticos deformables que tienen un número infinito de grados de libertad.

Los sistemas con un número de grados de libertad finitos se llaman *discretos* y los que tienen infinitos grados de libertad *continuos* [4]. En un buen número de situaciones los sistemas continuos se pueden aproximar a sistemas discretos. De esta forma se pueden obtener resultados de una manera simple. Sin embargo esto es una aproximación y si se requieren resultados exactos no hay más remedio que considerarlos

medios continuos. Pero dada la complejidad de los sistemas continuos, los métodos de análisis solo permiten abordar satisfactoriamente un número pequeño de casos. Y en estos casos los elementos tienen geometrías sencillas como vigas esbeltas de sección constante o placas finas de espesor constante. En la mayoría de los casos los sistemas se simplifican y se analizan como un sistema formado por un número pequeño de elementos, y por tanto de grados de libertad, que representan inercias o masas, elementos elásticos o disipativos. Por regla general cuanto mayor es el número de grados de libertad mayor es la precisión y fiabilidad de los resultados.

Por esta razón el péndulo al tener solo un grado de libertad tiene un modo de vibración, mientras que una viga al ser un medio continuo y tener infinitos grados de libertad, tiene infinitos modos de vibración con sus correspondientes frecuencias asociadas.

Clasificación de las vibraciones

Las vibraciones se pueden clasificar con diferentes criterios. Algunas de las más habituales se muestran a continuación [5]:

- **Vibraciones libres.** Si a un sistema se le aplica una perturbación inicial que crea un movimiento oscilatorio y este es perpetuo en el tiempo, las vibraciones son libres. Se debe a que no hay fuerzas exteriores sobre el sistema. El ejemplo del péndulo sin fricción es un caso de vibraciones libres.
- **Vibraciones forzadas.** Si un sistema está sometido a fuerzas exteriores, el resultado se conoce como vibraciones externas. Anteriormente se comentó que las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema pueden aportar o extraer energía del sistema. Todo depende de la dirección y sentido de la fuerza aplicada y el desplazamiento del cuerpo. El trabajo realizado por una fuerza sobre un cuerpo es $T = \int_0^x F \cdot dx$. En un caso de desplazamiento lineal, si la fuerza y el dx tienen el mismo sentido, el sistema gana energía. Si tienen sentidos distintos el sistema pierde energía. Imagínese el caso de un grado de libertad de una masa y un resorte sobre el que actúa una fuerza y que la fuerza varía en el tiempo de módulo y sentido de la forma $F(t) = A(\sin \omega t)$. Cuando la masa se está desplazando y la fuerza actuando habrá momentos en los que el sistema gane energía o el sistema pierda energía, dependiendo de los signos que tenga cada uno en cada momento. Por otro lado la frecuencia de las vibraciones del sistema corresponden a la frecuencia natural del sistema, que al ser de un grado de libertad es solo una. Si la frecuencia de la función de la fuerza coincide con la frecuencia natural del sistema los desplazamientos y la fuerza estarán acompañados, es decir, los signos de desplazamiento de la masa y de la fuerza siempre serán los mismos. Como consecuencia el sistema siempre estará ganando energía o siempre estará perdiendo energía. Si siempre está ganando energía los desplazamientos cada vez serán mayores, sin límite. En un caso real llegaría un punto en el que el sistema se rompería. Si al contrario el sistema perdiera energía siempre llegaría un momento en el que perdería toda la energía, no tendría

velocidad y el desplazamiento sería nulo. A partir de ese momento los signos ya no serían opuestos y el sistema ganaría energía de forma indefinida de la misma forma que en el caso anterior. En resumidas cuentas, si la frecuencia de las fuerzas variables exteriores coinciden con la frecuencia natural del sistema este incrementa la energía acumulada en él y los desplazamientos aumentan progresivamente sin límite. Este es el fenómeno comentado anteriormente que se conoce como resonancia.

Las vibraciones forzadas a su vez se pueden clasificar en dos grupos. Si el valor de la fuerza exterior que actúa sobre el sistema como función del tiempo es conocida, se llaman *deterministas*. En algunos casos dicha función no se conoce y a la fuerza se la llama no determinista o aleatoria. En estos casos si se registra la variación en el tiempo se puede intentar encontrar alguna periodicidad o regularidad estadística. En la naturaleza hay multitud de ejemplos: la velocidad el viento, irregularidades en el firme, terremotos etc. En estos casos las vibraciones se llaman *aleatorias*.

1.6.3 Análisis dimensional

El análisis dimensional es una herramienta de la física que afecta a la estructuración de las ecuaciones que relacionan las distintas variables de un fenómeno. Permite expresar una ecuación que relaciona un conjunto de variables dimensionales en otra ecuación en la que solo están involucradas un conjunto más reducido de variables adimensionales. La nueva expresión aparentemente puede resultar más farragosa pero en realidad es más simple que su equivalente dimensional. El análisis dimensional se puede aplicar incluso antes de conocer la ecuación del fenómeno. Esto es lógico, solo afecta a la forma de expresar las variables, el fenómeno es el mismo. Su uso se ha difundido por todas las ramas de la ciencia susceptibles de ser aplicado debido a las ventajas que aporta. Gracias a esto desde un punto de vista experimental, si se estudia un fenómeno con el fin de encontrar la forma en que se relacionan las variables, el trabajo necesario es menos tras utilizar el análisis dimensional. Esto se debe a que las variables que presumiblemente están involucradas en el fenómeno quedan reducidas a un número menor de variables adimensionales. Por lo que es necesario realizar menos ensayos. El análisis dimensional se basa en la relación existente en las dimensiones de las unidades de las variables, las cuales bajo esta óptica ya no son independientes entre sí. A continuación se explican los fundamentos del análisis dimensional [6].

Es conocido que en Física las magnitudes tienen dimensiones. Así se dice que $[v] = LT^{-1}$ y $[F] = MLT^{-2}$. Donde v es la velocidad y F la fuerza y sus dimensiones L longitud, T tiempo y M masa. El concepto de dimensión se debe a Fourier que, en su obra "*Théorie analytique de la chaleur*", dice: "Es necesario hacer notar que cada magnitud, indeterminada o constante, tiene una dimensión que le es propia, y que los términos de una no podrían ser comparados si no tuviesen el mismo exponente de dimensiones". Es decir, las ecuaciones deben de ser homogéneas dimensionalmente

hablando. Esta es la idea que subyace en el fondo de todo el análisis dimensional. Del concepto de magnitud, dimensión y homogeneidad de las ecuaciones físicas se ocupa el llamado análisis dimensional [6].

El análisis dimensional tiene aplicaciones en:

1. Detección de errores de cálculo.
2. Resolución de problemas cuya solución directa conlleva dificultades matemáticas insalvables. Por ejemplo, *Rayleigh*, precursor del análisis dimensional junto a Fourier, lo empleo por primera vez en Mecánica de Fluidos.
3. Creación y estudio de modelos reducidos. Por ejemplo, los túneles aerodinámicos, roller rig a escala etc.
4. Consideraciones sobre la influencia de posibles cambios en los modelos, tanto cambios reales como imaginarios.

Aquí se introducen algunos conceptos básicos que permitan introducir más adelante el análisis dimensional.

Observables: Se denominan observables a los entes que se pueden caracterizar por algún efecto observable. Ejemplo: Color, longitud, miedo, tiempo, etc.

Observables comparables: Dos observables, (A) y (B) , se dicen que son comparables si se puede definir la relación:

$$\frac{(A)}{(B)} = n$$

Ec. 9

Siendo n un número cualquiera. La física sólo se interesa por los observables que son comparables. La longitud de una mesa puede compararse con la longitud de un bolígrafo y podemos decir que una es n veces la otra. Sin embargo, la hermosura o el miedo son observables no comparables, puesto que no se puede decir, por ejemplo, que una persona haya pasado 3.5 veces más miedo que otra viendo una película de terror. En el caso de observables comparables, se puede definir criterios de igualdad y suma:

Criterio de igualdad: Diremos que un observable (A) es igual a otro (B) , si ocurre:

$$\frac{(A)}{(B)} = n \text{ con } n = 1$$

Ec. 10

Criterio de suma: Sean tres observables, (A_1) , (A_2) y (A_3) , comparables con otro observable (A_0) , mediante las relaciones:

$$\frac{(A_1)}{(A_0)} = n_1, \quad \frac{(A_2)}{(A_0)} = n_2 \text{ y } \frac{(A_3)}{(A_0)} = n_3$$

Ec. 11

Diremos que:

$$(A_1) + (A_2) = (A_3) \text{ cuando ocurra que } n_1 + n_2 = n_3$$

Ec. 12

Establecidos los entes de los que se hace cargo la Física, se definen magnitud, cantidad y unidad.

Magnitud: Se define como magnitud al conjunto de todos los observables que son comparables entre sí.

Cantidad: Se denomina cantidad a cada uno de los elementos del conjunto que define una magnitud.

La altura de un edificio, la distancia entre dos puntos, la amplitud de las oscilaciones de un péndulo, etc., son cantidades de la magnitud longitud. El día, la duración de un periodo lunar, etc., son cantidades de la magnitud tiempo. Como se ve en los anteriores ejemplos, las magnitudes son entes abstractos a los que se llega a partir de entes concretos, tal y como corresponde al proceso natural del pensamiento.

Unidad: La unidad, U_A , de una magnitud es una cantidad $(A_0) = U_A$ elegida arbitrariamente. Al formar las razones, respecto de esta cantidad:

$$\frac{(A_1)}{(U_A)} = A_1, \quad \frac{(A_2)}{(U_A)} = A_2,$$

Ec. 13

Se puede hacer corresponder, a cada cantidad (A_i) del observable, un número A_i que se llama medida de la cantidad (A_i) el observable, con la unidad U_A . Al cambiar de unidad, evidentemente, se obtendrá un diferente número y por tanto una medida diferente para la misma cantidad. Como se verá a continuación, la relación entre las medidas es inversamente proporcional al cociente de las unidades: Supongamos dos unidades U_A y $U_{A'}$. Al medir una misma cantidad (A) del observable se obtiene:

$$\frac{(A)}{U_A} = A \text{ y } \frac{(A)}{U_{A'}} = A' \rightarrow (A) = AU_A = A'U_{A'} \rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{U_A}{U_{A'}}$$

Ec. 14

Tal como se quería demostrar. A las relaciones $\frac{A}{A'} = \frac{U_A}{U_{A'}}$ se les llama razones de cambio [7].

Las magnitudes pueden clasificarse en dos grandes grupos:

a) **Magnitudes primarias o simples:** Se definen sin necesidad de acudir a ninguna fórmula que las compare con otras magnitudes. Se puede decir que el hombre tiene un conocimiento intuitivo de estas magnitudes. Ejemplos: Longitud, tiempo, fuerza, masa.

b) **Magnitudes secundarias:** Se definen a través de fórmulas que las ligan a otras magnitudes. Ejemplos: Densidad, aceleración, campo eléctrico, viscosidad. Por supuesto, el límite entre las de uno y otro tipo, a veces no está exento de discusiones filosóficas. Es el caso de la fuerza y la masa en las leyes de Newton.

La elección arbitraria de la unidad introduce un carácter subjetivo a las medidas. Por un lado, es lógico pensar que sería deseable que las leyes físicas deben estar exentas de estas arbitrariedades y que, por ello, deberían formularse en términos de observables o cantidades de estos observables. Así, se podría enunciar la segunda ley de Newton como:

$$(F) \propto (m)(a)$$

Ec. 15

Donde F es la fuerza m la masa y a la aceleración. Dicha ley indica que, si a una misma masa se le aplica una fuerza doble que una determinada, la aceleración también se vería duplicada. Pero por otro lado, el deseo de cuantificar que posee el hombre ha hecho que encuentre más útil trabajar con medidas, salvándose el problema de la arbitrariedad, que introducen las unidades, mediante una constante. De este modo, la ley anterior entre observables se transforma en una ecuación entre medidas con unas determinadas unidades:

$$FU_F = CmU_maU_a$$

Ec. 16

Donde la constante C es, por supuesto, tan convencional como el sistema de unidades elegido. La ecuación anterior se expresa en la forma convencional:

$$F = ma$$

Ec. 17

Donde ahora los símbolos F , m y a llevan asociado un número (medida) y una unidad.

Por ejemplo, si el sistema de unidades es:

$$U_F = 1 \text{ kp} \quad U_m = 1 \text{ kg} \quad y \quad U_a = 1 \text{ m/s}^2$$

Para que se cumpla la Ec. 17, la constante deber ser $C = \frac{1}{9,81} (1kp = 9,81 N)$. Si, por el contrario, el sistema de unidades es:

$$U_F = 1 N \quad U_m = 1 kg \quad y \quad U_a = 1 m/s^2$$

Entonces la constante será $C = 1$.

Se puede observar que, eligiendo el sistema de unidades adecuado, se ha podido eliminar la constante de la ecuación entre medidas. En general, no siempre es posible hacer esto. Cuando una constante puede ser obviada mediante la aplicación de un sistema de unidades, diremos que esa constante es superflua. Además, al sistema de unidades que elimina las constantes superfluas del conjunto de ecuaciones de una teoría física, le llamaremos sistema coherente de unidades. En el caso de que las constantes no sean superfluas, se puede diferenciar dos casos:

a) **Constantes particulares:** Son aquellas que dependen de la naturaleza de los cuerpos que intervienen en el fenómeno y, por tanto, son ineludibles. Ejemplo: La constante recuperadora de un muelle. Podría elegirse un sistema de unidades que hiciese la unidad a la constante de un muelle, pero al cambiar de muelle volvería a aparecer la constante del nuevo muelle.

b) **Constantes universales:** Son las que no dependen de la naturaleza de los cuerpos en cuestión. Dicho de otro modo, a toda ecuación que se conserve invariante cuando cambian la naturaleza de los cuerpos con los que se opera, corresponde una constante universal. En Física, se utilizan las siguientes constantes universales:

- **La constante de gravitación universal, $G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.** Aparece en la ley de gravitación universal:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

Ec. 18

Donde se expresa que la fuerza de atracción entre dos masas es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias.

- **La constante de Boltzmann, $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.** En todo sistema formado por un gran número de elementos en equilibrio, la energía media, $\bar{\epsilon}$, que se asocia a cada grado de libertad, es proporcional a la temperatura absoluta:

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} kT$$

Ec. 19

- **La velocidad de la luz, $c = 2.998 \cdot 10^8$ m/s.** Una masa en reposo tiene asociada una energía E dada por :

$$E = mc^2$$

Ec. 20

Siendo c una constante que en un sistema de unidades coherente se corresponde con la velocidad de la luz en el vacío.

- **La constante de Planck, $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js.** Esta constante está relacionada con la cuantificación de la energía que se puede expresar como que en todo proceso periódico de frecuencia f , la energía sólo puede experimentar cambios que sean múltiplos de:

$$\Delta\varepsilon = hf$$

Ec. 21

- **La constante de Avogadro, $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹.** En todo cuerpo, el número de moles, n , es proporcional al número de moléculas, N , según:

$$N = nN_A$$

Ec. 22

Que también se puede expresar como que 1 mol de masa es la cantidad de materia que contiene un número N_A de partículas.

- **La permeabilidad eléctrica del vacío o constante dieléctrica del vacío, $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m.** Aparece en la ley de Coulomb:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q_1q_2}{r^2}$$

Ec. 23

La cual expresa la atracción o repulsión entre dos cargas eléctricas es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

Cualquier combinación de constantes universales es una constante universal. Algunas de estas combinaciones reciben nombre especiales, como la constante de los gases $R = kN_A$, producto de la constantes de *Boltzmann* y *Avogadro*, que aparece en la ecuación de los gases perfectos cuando se expresa ésta a través del número de moles. Con el fin de aclarar esto, considerando un volumen V de gas en el que tenemos N moléculas a una presión P y temperatura absoluta T . Con n siendo el número de partículas por unidad de volumen, la ecuación de los gases perfectos se puede escribir como moles:

$$P = nkT = \frac{N}{V}kT \rightarrow PV = n_{moles}N_AkT = n_{moles}(N_Ak)T \rightarrow PV = n_{moles}RT$$

Ec. 24

Otra constante que se deriva de las seis primeras es la permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$ que aparece en las ecuaciones que describen la interacción entre corrientes eléctricas, como la ley de fuerza de *Ampère*, o en la ley de *Biot y Savart*:

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \wedge \vec{r}}{r^3} dv'$$

Ec. 25

Donde se relaciona la densidad de corriente \vec{J} en un punto \vec{r}' con el campo magnético \vec{B} que produce esta corriente en el punto del espacio \vec{R} , siendo $\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}'$.

Algunos autores proponen como postulado, basado en la experiencia, que toda ecuación fundamental de la Física se puede expresar en forma de monomio [8]:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = 1$$

Ec. 26

Donde x_i son cantidades del observable (x_i) expresado en el sistema de unidades $\{U_i\}$ y α_i es un factor (número adimensional). Sin embargo otros (*Bridgman, Isaacson*) demuestran, a partir de otros postulados, que toda ecuación que pretende mantener su forma, al cambiar de sistema de unidades, debe ser un monomio como el que muestra la Ec. 26. Sea cual fuese el caso, consideremos una teoría física cuya totalidad total t de ecuaciones fundamentales es de la forma:

$$t \text{ ecuaciones} \begin{cases} x_1^{\alpha_{11}} x_2^{\alpha_{12}} \dots x_n^{\alpha_{1n}} = 1 \\ x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{22}} \dots x_n^{\alpha_{2n}} = 1 \\ \dots \\ x_1^{\alpha_{t1}} x_2^{\alpha_{t2}} \dots x_n^{\alpha_{tn}} = 1 \end{cases}$$

Ec. 27

Donde se ha elegido un sistema coherente de unidades, $\{U_i\} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$, de modo que se eliminen las constantes superfluas. El conjunto de ecuaciones anteriores puede escribirse de forma más compacta como:

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_{ji}} = 1 \quad \text{con} \quad j = 1, \dots, t.$$

Ec. 28

Tal como se hace al expresar un resultado, por ejemplo $v = 15 \text{ m/s}$, se va a expresar, en la ecuación anterior, las unidades de las cantidades que intervienen en las ecuaciones de manera explícita; esto es:

$$x_i = \bar{x}_i [x_i] \quad \text{donde} \quad \begin{cases} x_i \text{ es una cantidad física (medida de unidades)} \\ \bar{x}_i \text{ representa la medida (un número)} \\ [x_i] \text{ son las unidades de } x_i \end{cases}$$

Ec. 29

Quedando la ecuación Ec. 29 en la forma:

$$\prod_{i=1}^n \bar{x}_i^{\alpha_{ji}} [x_i]^{\alpha_{ji}} = \prod_{i=1}^n \bar{x}_i^{\alpha_{ji}} \prod_{i=1}^n [x_i]^{\alpha_{ji}} = 1 \quad \text{con } j = 1, \dots, t.$$

Ec. 30

Debiéndose de cumplir la ecuación anterior para las medidas (números) asociadas a las cantidades:

$$\prod_{i=1}^n \bar{x}_i^{\alpha_{ji}} = 1 \quad \text{con } j = 1, \dots, t.$$

Ec. 31

Y para las dimensiones:

$$\prod_{i=1}^n [x_i]^{\alpha_{ji}} = 1 \quad \text{con } j = 1, \dots, t.$$

Ec. 32

Tomando logaritmos neperianos en la ecuación anterior, ésta se transforma en:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \ln[x_i] = 0 \quad \text{con } j = 1, \dots, t.$$

Ec. 33

La ecuación Ec. 33 Representa un sistema de ecuaciones con t ecuaciones y n incógnitas ($\ln[x_i]$), donde la matriz de coeficientes α_{ji} es también la matriz de los exponentes. Supóngase, como suele ser habitual en las teorías físicas, que el número de incógnitas es superior al número de ecuaciones, esto es $n > t$. Si h es el rango de esta

matriz (h coincidirá con t , si todas las ecuaciones son linealmente independiente o en caso contrario será menor que t), el número de incógnitas arbitrarias será $n - h = m$.

Tomando como arbitrarias o independientes a las m primeras incógnitas asociadas a las unidades $[x_1], [x_2], \dots, [x_m]$, al conjunto de magnitudes $B = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, asociadas a las m unidades que se han tomado como independientes o arbitrarias, se le denomina base de la teoría física y al número m de sus elementos se le llama multiplicidad de la base, mientras que a cada magnitud de la base se la llama magnitud fundamental.

A partir de la ecuación Ec. 32, el resto de unidades puede ser expresado por una función:

$$[x_i] = \prod_{j=1}^m [x_j]^{\varepsilon_{ij}} \quad \text{con } i = m + 1, \dots, n.$$

Ec. 34

A este formato se le denomina fórmula dimensional de la magnitud física x_i , y al conjunto de coeficientes $\{\varepsilon_{ij}\}$ ($j = 1, \dots, m$) se les llama dimensiones de la magnitud x_i en la base B.

A continuación se particulariza todo el desarrollo del apartado anterior para una parte de la Física: la mecánica. Como ya se vio el problema se reduce a poner las ecuaciones fundamentales en forma de monomios y luego calcular el rango de la matriz de los exponentes [6].

En mecánica, tres ecuaciones fundamentales e independientes son (eliminamos el carácter vectorial de las ecuaciones por simplicidad en las ecuaciones y por no estar implicado el carácter vectorial en lo que concierne a continuación, también puede obviarse el carácter vectorial tomando las diferentes componentes de las ecuaciones implicadas):

$$\begin{cases} F = ma \\ F = G \frac{Mm}{r^2} \\ a = \frac{d^2 r}{dt^2} \end{cases}$$

Ec. 35

Que pueden ser expresadas en la forma general dada por las ecuaciones Ec. 27 y Ec. 28:

$$\begin{cases} Fm^{-1}a^{-1} = 1 \\ Fr^2G^{-1}M^{-1} = 1 \\ a\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^{-1} = 1 \end{cases}$$

Ec. 36

Debiéndose cumplir las ecuaciones anteriores tanto para los números que expresan las medidas como para las unidades asociadas a las cantidades medidas. Procediendo como en el apartado anterior, la ecuación de las unidades, similar a la ecuación Ec. 32, viene dada por:

$$\begin{cases} [F][m]^{-1}[a]^{-1} = 1 \\ [F][r]^2[G]^{-1}[m]^{-2} = 1 \\ [a][r]^{-1}[t]^2 = 1 \end{cases}$$

Ec. 37

Tomando logaritmos en la ecuación anterior:

$$\begin{cases} \ln[F] - \ln[m] - \ln[a] = 0 \\ \ln[F] + 2\ln[r] - \ln[G] - 2\ln[m] = 0 \\ \ln[a] - \ln[r] + 2\ln[t] = 0 \end{cases}$$

Ec. 38

En forma matricial se expresa como:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln[F] \\ \ln[m] \\ \ln[a] \\ \ln[G] \\ \ln[r] \\ \ln[t] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ec. 39

La matriz de los exponentes dimensionales α_{ji} es dada por:

$$\alpha_{ji} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ec. 40

El rango de la matriz de coeficientes anterior es $h = 3$, ya que se toma, por ejemplo, las tres primeras columnas, el determinante de la matriz que se forma con estas

columnas viene dado, desarrollándolo por la última fila que sólo tiene un elemento distinto de cero, por:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0$$

Ec. 41

Como el número de magnitudes que intervienen en las ecuaciones es $n = 6$ y el rango de la matriz de los exponentes dimensionales es $h = 3$, el número de magnitudes linealmente independientes que forman la base es $6 - 3 = 3$. Generalmente se eligen $[r]$, $[m]$ y $[t]$ y se escriben como L , M , T . Como es conocido, en el Sistema Internacional de Unidades, las unidades de estas magnitudes son respectivamente el metro (m), el kilogramo (kg) y el segundo (s).

Volviendo a la ecuación Ec. 37 las dimensiones del resto de magnitudes, no incluidas en la base, pueden ponerse en función de los elementos M , L , T de la base:

$$\begin{cases} [F][a]^{-1} = M \\ [F][G]^{-1} = M^2 L^{-2} \\ [a] = L T^{-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} [a] = L T^{-2} \\ [F] = M^{-1} L T^{-2} \\ [G] = L^3 T^{-2} \end{cases}$$

Ec. 42

Al considerar fenómenos térmicos se hace necesario la inclusión de la temperatura, cuya unidad en el sistema internacional es el grado kelvin (K), y si además se consideran fenómenos eléctricos, debe incluirse la corriente eléctrica, cuya unidad es el amperio (A); aunque en principio parece más intuitivo la inclusión de la carga eléctrica, en la práctica ésta es una magnitud física más difícil de medir que la corriente eléctrica. También son necesarias la cantidad de sustancia, cuya unidad en el sistema internacional es el mol (mol), y la intensidad luminosa para expresar la luminosidad que nuestros ojos perciben al observar una fuente que emite luz y cuya unidad es la candela (cd) [8].

De esta forma, la base que adoptamos para la Física está compuesta por L , M , Θ , I (corriente eléctrica), I (corriente luminosa) y cantidad de materia, cuyas unidades podrían elegirse de forma arbitraria y que determinan las unidades del resto de las magnitudes físicas.

Las leyes físicas deben de ser invariantes respecto del sistema de unidades elegido. Obsérvese que esta invariancia implica que la función que defina una ley física debe ser homogénea tanto dimensionalmente como matemáticamente hablando.

Se dice que una ley física es dimensionalmente homogénea si todos sus términos (sumandos) tienen la misma dimensión. Como se puede ver, esto asegura su invariancia respecto del sistema de unidades [7].

Si los términos de la ecuación $A + B = C$ tienen todos la misma dimensión y se cambia el sistema de unidades de modo que se duplique la medida de A , obteniéndose $A' = 2A$, como todos los términos responden a la misma ecuación de dimensiones,

también se habrán duplicado B y C , pasando a ser $B' = 2B$ y $C' = 2C$, de modo que la ley se seguirá cumpliendo la ecuación Ec. 43 en el nuevo sistema de unidades.

$$2A = 2B + 2C \rightarrow A' = B' + C'$$

Ec. 43

La homogeneidad dimensional implica que los argumentos de las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc. deben ser adimensionales.

Respecto de la homogeneidad matemática la ecuación Ec. 44:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Ec. 44

Es homogénea, matemáticamente hablando, si se cumple:

$$f(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n) = 0$$

Ec. 45

Se observa que, en efecto, una ecuación física debe ser homogénea matemáticamente.

Sea la ecuación Ec. 44 representativa de una ley física en la que intervienen las medidas x_1, x_2, \dots, x_n de sendas magnitudes en un sistema coherente de unidades. Al utilizar otro sistema de unidades cuyas razones de cambio sean:

$$\lambda_i = \frac{x_i}{x'_i} \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ec. 46

La ecuación Ec. 44 se transforma en:

$$f(\lambda_1 x'_1, \lambda_2 x'_2, \dots, \lambda_n x'_n) = 0$$

Ec. 47

Pero, al representar $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ una ley física universal, debe ser invariante frente a cambios de sistemas de unidades y cumplirse:

$$f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = 0$$

Ec. 48

Resultando evidente, de las ecuaciones Ec. 47 y Ec. 48, que f es una función homogénea matemáticamente hablando.

Teorema de Buckingham o teorema Π

Hasta ahora se ha mostrado la teoría en torno a las magnitudes y unidades en la física. Esta teoría es necesaria para entender el teorema Π , que es a partir del cual se articula el análisis dimensional. El enunciado del teorema Π dice así [7]:

1. Toda ecuación en la forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Ec. 49

Si es una ley representativa de un fenómeno física, puede expresarse como:

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = 0$$

Ec. 50

Donde los π_i son los monomios independientes de dimensión nula o monomios π , que pueden formarse con las magnitudes consideradas en la ley física.

2. El número de estos monomios es $m = n - h$, donde h es el rango de la matriz formada con los exponentes dimensionales de las magnitudes, en relación a una base dada. A continuación se muestra la demostración de este punto:

Sea la ecuación Ec. 49 representativa de un fenómeno físico, y sean dadas las dimensiones de las magnitudes x_i , en función de la base $\{L, M, T\}$ por:

$$[x_i] = M^{\alpha_{1i}} L^{\alpha_{2i}} T^{\alpha_{3i}} \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ec. 51

(Se utiliza una base con tres elementos por sencillez en las expresiones, pero podría formarse una base con n elementos).

Se pretende formar agrupaciones de monomios adimensionales en la forma:

$$\pi = \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i} \quad \text{que cumplan} \quad [\pi] = 1$$

Ec. 52

Sustituyendo Ec. 51 en Ec. 52 y reagrupando obtenemos:

$$\begin{aligned}
[\pi] &= \prod_{i=1}^n [x_i]^{\varepsilon_i} = \prod_{i=1}^n [M^{\alpha_{1i}} L^{\alpha_{2i}} T^{\alpha_{3i}}]^{\varepsilon_i} = \prod_{i=1}^n M^{\alpha_{1i}\varepsilon_i} L^{\alpha_{2i}\varepsilon_i} T^{\alpha_{3i}\varepsilon_i} = \\
&= (M^{\alpha_{11}\varepsilon_1} M^{\alpha_{12}\varepsilon_2} \dots M^{\alpha_{1n}\varepsilon_n}) (L^{\alpha_{21}\varepsilon_1} L^{\alpha_{22}\varepsilon_2} \dots L^{\alpha_{2n}\varepsilon_n}) (T^{\alpha_{31}\varepsilon_1} T^{\alpha_{32}\varepsilon_2} \dots T^{\alpha_{3n}\varepsilon_n}) = \\
&= M^{\sum_{i=1}^n \alpha_{1i}\varepsilon_i} L^{\sum_{i=1}^n \alpha_{2i}\varepsilon_i} T^{\sum_{i=1}^n \alpha_{3i}\varepsilon_i} = 1
\end{aligned}$$

Ec. 53

Para que se cumpla la ecuación anterior y el monomio sea adimensional, los tres exponentes deben ser igual a la unidad; es decir:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \varepsilon_i = 0 \quad \text{con} \quad j = 1, 2, 3.$$

Ec. 54

La ecuación anterior representa un sistema homogéneo de n incógnitas (ε_i) y 3 ecuaciones. Si el rango de la matriz es h (h puede tomar los valores 1, 2 ó 3 y $h < n$), los conjuntos de variables ε_i que pueden elegirse de forma arbitraria (monomios independientes) es $m = n - h$. Luego, eligiendo m conjuntos diferentes e independientes de ε_i , que notaremos ε_{ik} con $i = 1, \dots, n$ y $k = 1, \dots, m$, se puede formar los m monomios adimensionales siguientes:

$$\pi_k = \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_{ik}} \quad \text{con} \quad k = 1, \dots, m.$$

Ec. 55

Finalmente, como la función $f(x_1, x_2, \dots, x_3) = 0$ es dimensionalmente homogénea, se agrupan las variables en la forma que indican los monomios adimensionales π_k y el resultado obtenido será una nueva función de los π_k , esto es $F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m) = 0$, tal como se quería demostrar.

De la función $F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m) = 0$ podría despejarse uno de los monomios en función de los otros, de modo que la información obtenida del análisis dimensional tome la forma:

$$\pi_1 = \varphi(\pi_2, \dots, \pi_m)$$

Ec. 56

Si sólo se obtiene un monomio:

$$f(\pi_1) = 0 \rightarrow \pi_1 = f^{-1}(0) \rightarrow \pi_1 = \text{cte}$$

Ec. 57

En este caso se conocería toda la información del sistema físico, salvo una constante.

Con el fin de aclarar el procedimiento del teorema II, a continuación se muestra la obtención de los monomios adimensionales, para la ecuación del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de un cuerpo [7]:

La función de partida es:

$$e = vt + \frac{1}{2}at^2$$

Ec. 58

Expresada en la forma general:

$$f(v, a, e, t) = 0 \quad \text{como} \quad e - vt - \frac{1}{2}at^2 = 0$$

Ec. 59

A continuación se forma un monomio con todas las variables que intervienen en la función:

$$\pi = v^{\varepsilon_v} a^{\varepsilon_a} e^{\varepsilon_e} t^{\varepsilon_t}$$

Ec. 60

Se impone que sea adimensional $[\pi] = 1$. Sustituyendo $[v] = LT^{-1}$, $[a] = LT^{-2}$, $[e] = L$ y $[t] = T$, en $[\pi] = 1$ queda:

$$(LT^{-1})^{\varepsilon_v} (LT^{-2})^{\varepsilon_a} (L)^{\varepsilon_e} (T)^{\varepsilon_t} = 1 \rightarrow L^{\varepsilon_v + \varepsilon_a + \varepsilon_e} T^{-\varepsilon_v - 2\varepsilon_a + \varepsilon_t} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \varepsilon_v + \varepsilon_a + \varepsilon_e = 0 \\ -\varepsilon_v - 2\varepsilon_a + \varepsilon_t = 0 \end{cases}$$

Ec. 61

Se han obtenido dos ecuaciones ($h = 2$) con 4 incógnitas ($n = 4$, ε_v , ε_a , ε_e y ε_t) $\rightarrow m = n - h = 4 - 2 = 2$. Hay dos incógnitas arbitrarias, lo que da la posibilidad de encontrar dos conjuntos de soluciones linealmente independientes que hagan $[\pi] = 1$. Se eligen:

$$\begin{cases} \varepsilon_e = 1, \varepsilon_a = 0 \\ \varepsilon_e = 0, \varepsilon_a = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_e = 1, \varepsilon_a = 0, \varepsilon_t = -1, \varepsilon_t = -1 \rightarrow \pi_1 = \frac{e}{vt} \\ \varepsilon_e = 0, \varepsilon_a = 1, \varepsilon_t = -1, \varepsilon_t = 1 \rightarrow \pi_2 = \frac{at}{v} \end{cases}$$

Ec. 62

Encontrándose dos monomios independientes. La función $e = vt + \frac{1}{2}at^2$ se puede expresar como un caso particular de $F(\pi_1, \pi_1, \dots, \pi_m) = 0$.

$$\frac{e}{vt} - 1 - \frac{1}{2} \frac{at^2}{vt} = 0 \rightarrow \pi_1 - 1 - \frac{1}{2} \pi_2 = 0$$

Ec. 63

En el ejemplo anterior se ha demostrado que una función que describe un fenómeno físico puede expresarse como función de los monomios π independientes que podemos formar con las magnitudes físicas que intervienen en el proceso. En la aplicación del teorema II, se sigue normalmente, el camino opuesto. Se construyen monomios independientes adimensionales que mediante las variables que intervienen en el proceso y con estos monomios se construye la ecuación que rige el proceso físico, supuesto que sea desconocida esta ecuación [8].

Los pasos a seguir en la resolución de un problema son:

1. Considerar todas las magnitudes que intervienen en el fenómeno, incluyendo las constantes no eludibles.
2. Establecer la matriz de coeficientes y su rango.
3. Determinar el número de monomios

A continuación se muestra un ejemplo de la aplicación del teorema II utilizando el caso anterior, el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de un cuerpo, pero en este caso se considera desconocida la ecuación-

Las variables que intervienen en el fenómeno físico y sus dimensiones son:

$$\begin{cases} [v] = LT^{-1} \\ [a] = LT^{-2} \\ [e] = L \\ [t] = T \end{cases}$$

Ec. 64

La matriz de los coeficientes en la base $\{L, M, T\}$ queda:

$$\begin{matrix} M \\ L \\ T \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha_{ji}$$

Ec. 65

El rango de la matriz es $h = 2$. El número total de variables es 4 por lo que en número de monomios es $m = n - h = 4 - 2 = 2$, que se denominaran π_1 y π_2 . Primeramente se calcula el sistema de ecuaciones de los exponentes de los monomios:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_v \\ \varepsilon_a \\ \varepsilon_e \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_v + \varepsilon_a + \varepsilon_e = 0 \\ -\varepsilon_v - 2\varepsilon_a + \varepsilon_t = 0 \end{cases}$$

Ec. 66

Pudiéndose elegir libremente, dos de las incógnitas.

1ª elección:

$$\varepsilon_e = 1 \text{ y } \varepsilon_a = 0 \rightarrow \varepsilon_v = -1 \text{ y } \varepsilon_t = -1 \rightarrow \pi_1 = ev^{-1}t^{-1} \rightarrow \pi_1 = \frac{e}{vt}$$

Ec. 67

2ª elección:

$$\varepsilon_e = 0 \text{ y } \varepsilon_a = 1 \rightarrow \varepsilon_v = -1 \text{ y } \varepsilon_t = 1 \rightarrow \pi_2 = av^{-1}t \rightarrow \pi_2 = \frac{at}{v}$$

Ec. 68

La función que rige el proceso físico tiene la forma general $F(\pi_1, \pi_2) = 0$ o bien $\pi_1 = \varphi(\pi_2)$. En este caso la función queda:

$$\frac{e}{vt} = \varphi\left(\frac{at}{v}\right)$$

Ec. 69

Si se compara la ecuación Ec. 69 con la Ec. 63 se puede observar que los monomios son los mismos. Lo único que no se conoce es la función que los relaciona. El análisis dimensional no puede proporcionar más información pero desde un punto de vista experimental, la aún desconocida expresión del fenómeno ha pasado de depender de cuatro variables a dos. Esto reduce considerablemente el trabajo de experimentación.

El principio de semejanza no es más que una generalización del carácter de homogeneidad dimensional de las ecuaciones de la Física. Dice así: “Las leyes de la Física son invariantes ante cambios de las medidas de un fenómeno físico en un mismo sistema de unidades, ya sean estos cambios reales o imaginarios”. La utilidad práctica más evidente de este principio radica en el estudio de las propiedades físicas de una maqueta realizada a escala reducida, para después aplicar los resultados al objeto real. Esta práctica es de gran importancia en la construcción de aviones, navíos y obras hidráulicas. Además de esta práctica resulta interesante hacer disquisiciones sobre cambios imaginarios o reales en las medidas. Por ejemplo, si tenemos dos péndulos, uno de longitud doble que el otro, podemos saber qué relación existe entre sus periodos [8].

Esta es la piedra angular de este proyecto. Explicado el principio de semejanza y su justificación teórica se está en mejores condiciones de entender los objetivos del presente proyecto.

1.6.4 Process Compensated Resonance Testing

Se han utilizado diferentes tipos de ensayos basados en la resonancia para detectar defectos desde hace más de cien años. Un ejemplo típico de estos ensayos y muy sencillo consiste en golpear un componente mecánico normalmente metálico con un martillo. En función del sonido que se escuche se puede identificar la presencia fisuras. Los fundamentos de los ensayos modernos basados en la resonancia se empezaron a desarrollar a finales de los años ochenta. Por aquel entonces científicos del *Los Alamos National Laboratory* desarrollaron trabajos en los que combinaron técnicas avanzadas de computación con la precisión de nuevas tecnologías de generación de frecuencias. Utilizando estos medios llevaron a cabo análisis sobre la diferencia de la respuesta de resonancia frente a variaciones en la fabricación de piezas metálicas. Un tiempo después los resultados de estos trabajos iniciales terminaron cristalizando, y a principios de los años noventa la compañía *Quatro Corporation* obtuvo una licencia para su uso. Esta compañía, que en 1993 paso a llamarse *Quasar International*, centró el desarrollo de esta tecnología en el sector de la automoción y durante los siguientes diez años desarrolló un tipo de ensayo no destructivo llamado *Process Compensated Resonance Testing*. El uso al que estaba orientado era al de control de calidad en la fabricación de componentes para vehículos. Posteriormente se ha ido implementando en otros sectores como la fabricación aeronáutica y actividades como inspección y mantenimiento [12].

El *Process Compensated Resonance Testing* (PCRT) es un tipo de ensayo no destructivo extremadamente flexible, se puede implementar en la fabricación de piezas en sectores de automoción, aeronáutica, ferrocarriles. Es aplicable a piezas metálicas y cerámicas. Los costes son relativamente baratos comparado con otros tipos de ensayos, siempre y cuando el tamaño de las series lo justifiquen. En una aplicación del PCRT en control de calidad el objetivo es permitir discriminar aquellas piezas que tienen defectos que podrían tener un fallo prematuro en servicio. Los métodos de ensayo convencionales de detección de defectos internos como radiografías, perturbación magnética etc, identifican piezas defectuosas rastreándolas en busca de indicaciones de defectos. Se considera que la presencia y el tamaño del indicio del defecto tienen una correlación con la existencia e importancia del defecto interno. El problema de esta suposición es que el fenómeno físico en el que se basa el ensayo no está relacionado con el comportamiento de la pieza en estudio. Esto implica que el tamaño aparente del indicio del defecto no es buen indicador de si el defecto es en realidad importante de cara al funcionamiento de la pieza en servicio. Por lo que mediante estos métodos se pueden considerar piezas defectuosas aquellas que en realidad podrían ser utilizadas sin problemas. Lo que se ha comentado orientado a control de calidad se aplica igualmente

en inspecciones de trabajos de mantenimiento. El uso de ensayos convencionales puede llevar a la decisión de sustituir piezas consideradas no aptas para su uso, que en realidad si lo son con los costes asociados a esto. Esto es más acusado cuando la fiabilidad de la pieza es crítica por cuestiones de seguridad, donde para prevenir daños mayores ante la incertidumbre la pieza se sustituye al menor indicio de daños. La mencionada falta de correlación entre los fundamentos de detección y tamaño real del defecto es muy común en los métodos de inspección no destructiva convencionales. Por otro lado hay que añadir que en muchos de los métodos convencionales la interpretación de los resultados tiene una importante carga subjetiva. Como ejemplo de esto consideremos la inspección de una pieza mediante radiografía. Todo el mundo conoce las radiografías médicas y es fácil entender la dificultad que entraña su interpretación, por lo que es fácil suponer que dificultades similares se encuentran en la interpretación de una radiografía de una pieza. Como prueba del interés de la industria por el PCRT se ha desarrollado una norma respecto específica para este tipo de ensayos ASTM - e2534.

El PCRT se basa en cuatro principios fundamentales:

- El uso de la resonancia mecánica como base de la correlación con el comportamiento mecánico.
- La utilización de un proceso de compensación de variaciones que permita la detección de defectos en un entorno real de fabricación o el entorno de operación de máquinas, no solo en condiciones de laboratorio.
- La realización de medidas precisas de las frecuencias que serán utilizadas en el proceso de compensación.
- Compensación de los efectos de la temperatura para mantener la precisión de la frecuencia independiente de la temperatura de la pieza.

Como se ha comentado anteriormente las frecuencias naturales de una pieza están determinadas por las propiedades del material y la geometría, concretamente del módulo elástico y la densidad. Por lo que los ensayos de PCRT están determinados por las propiedades y geometría de las piezas, y como consecuencia los resultados de un ensayo PCRT tienen la capacidad de predecir el comportamiento que tendrá la pieza. Cuando en la pieza tiene un defecto como una fisura, una inclusión u otro defecto que altere la rigidez de la misma, provocará una disminución de las frecuencias naturales. Este cambio será proporcional a la variación de la rigidez [12].

Lamentablemente el uso de las frecuencias naturales como fundamento de un ensayo de inspección tiene un problema. Durante el proceso de media pueden aparecer variaciones en los resultados, debidas a que las condiciones de las medidas de campo en una planta de fabricación o en operaciones de mantenimiento in situ no son de laboratorio. Estas variaciones pueden enmascarar defectos existentes en la pieza.

La compañía *Quasar International* desarrolló un método para compensar dichas variaciones y poder detectar los defectos con fiabilidad. El método de *Quasar*

International realiza medidas de varias frecuencias naturales de una pieza y utiliza un algoritmo de reconocimiento de patrones patentado con ellas para compensar las desviaciones. Dicho algoritmo está basado en el sistema de *Mahalanobis Taguchi*. (MTS) y permite considerar si una pieza es acorde con las especificaciones en base a la distribución de las medidas de varias frecuencias naturales. El MTS tiene como base una potente herramienta matemática llamada discriminador cuadrático. El discriminador cuadrático es utilizado para diferenciar entre la clase general de piezas consideradas sin defectos y uno o varios tipos de defectos. El MTS junto con el discriminador permite una detección cercana 100% de los defectos presentes en la pieza.

Los patrones calculados predicen la frecuencia natural de cada modo de vibración que es objeto de estudio de cada pieza. La diferencia entre el valor de la predicción y el valor medido en la pieza es el error de predicción. Las piezas que no tiene defectos o bien tiene defectos dentro de lo aceptable tienen un error de predicción pequeño. Por el contrario las piezas con defectos tienen un error grande.

Hay que recalcar la importancia de la exactitud de la realización de medidas de las frecuencias naturales. Lógicamente en cualquier tipo de medición independientemente de la magnitud a medir o con qué propósito se haga, la precisión es importante. Pero el PCRT es especialmente sensible a la precisión de las medidas. La mayoría de los ensayos que permiten medir la frecuencia de resonancia de una pieza, simplemente golpean la pieza y matemáticamente transforman el sonido producido en un conjunto de frecuencias. Desde un punto de vista práctico esta aproximación de las frecuencias naturales está limitada entorno al ± 1 %. Esto no es suficiente para el proceso de compensación. El PCRT utiliza ondas sinusoidales de barrido para medir las frecuencias naturales. En este método, la pieza a estudio es excitada mediante una vibración sinusoidal con una frecuencia dada, y la vibración producida en la pieza es medida por un receptor. Este proceso se realiza para distintas frecuencias realizando un barrido a lo largo del intervalo de frecuencias de estudio. Con este método de barrido se logra una precisión del $\pm 0,001$ %. Con esta precisión la realización del proceso de compensación es posible [10].

Sin embargo el método de barrido con ondas sinusoidales no puede por si mismo proporcionar la precisión necesaria. Hay dos factores adicionales a tener en cuenta [13].

- Las frecuencias naturales de una pieza varían inversamente con su temperatura. Esto se debe a que si las frecuencias naturales dependen de las propiedades del material de la pieza, estas tienen una dependencia con la temperatura. Aunque estas variaciones en las propiedades son despreciables respecto a su comportamiento cuando este en servicio o durante el proceso de fabricación, (al margen de tratamientos térmicos) dada la exactitud necesaria para la realización del PCRT se deben tener en cuenta. En el caso de una pieza de hierro la variación es del 0,015 % por grado centígrado. Es evidente que en el proceso de compensación se debe eliminar la dependencia con la temperatura.

- El contacto de los transductores que excitan la pieza y recogen la vibración en la pieza con esta establecen una restricción de los desplazamientos de la pieza. Esto provoca que las frecuencias naturales se vean afectadas. La empresa *Quasar International* desarrolló un sistema de apoyo preciso de la pieza que permite mantener una precisión del orden de 0,01 %, suficiente para el PCRT.

La precisión de la medida de la frecuencia se llama margen, que es la desviación estándar de la frecuencia a medir tras realizar un número de repetición de medidas estadísticamente suficiente. La combinación del procedimiento de barrido mediante excitaciones sinusoidales, la compensación de la temperatura y el sistema de apoyo preciso permite tener un margen entre 0,003 % al 0,3%.

A pesar de la complejidad del ensayo el tamaño del equipo es relativamente pequeño y no es difícil de implementar en un proceso productivo. El tiempo que se requiere para implementar una estación de ensayo está comprendido entre dos días y dos meses, depende mucho de la pieza y el proceso productivo, pero lo normal es que dure entorno a dos semanas. Un detalle importante es que para su implementación se requieren tanto piezas sin defectos como con defectos. La cantidad necesaria de ellos es variable y depende de la pieza y las exigencias de calidad. Durante el proceso de calibrado se necesitan igualmente piezas sin defectos y con defectos. En el proceso de calibración se utilizan del orden de cien piezas sin defectos y cincuenta con defectos.

Como se ha comentado la duración típica de un proceso de ajuste es de unos pocos días a dos semanas, por lo que este sistema de control de calidad no es muy flexible. Esto implica que por lo general solo sea apropiado para series grandes de piezas, que justifique los costes del ajuste del PCRT. De forma orientativa se puede decir que al menos las series deben ser de cien mil anuales. En caso de que la pieza tenga un alto valor o se requiera una gran fiabilidad por cuestiones de seguridad, es justificado utilizarlo en series de diez mil piezas anuales [13].

Capítulo 2

Desarrollo de la
comprobación del análisis
dimensional.

2.1 Metodología de trabajo

Con el objetivo de comprobar la validez del análisis dimensional en ejes ferroviarios, se han obtenido los modos de vibración de dos ejes semejantes. Ambos ejes están basados en un eje usado comúnmente en ferrocarriles españoles sobre el que se han hecho modificaciones. El primero de los ejes tiene dimensiones a escala 1:1 y el segundo escala 1:6. Se ha utilizado una escala 1:6 por ser una de las opciones utilizadas habitualmente para este tipo de ensayos a escala. Los modos de vibración también tienen una dependencia del material de cual están hechos los ejes. En el caso de los ensayos a escala puede ser útil y de hecho se utilizan distintos materiales de los que estarán fabricados los componentes reales por razones de coste o por facilitar el ensayo. Por ésta razón al eje a escala 1:1 se le asignaron propiedades de acero al carbono templado A1N, utilizado frecuentemente en ejes ferroviarios, mientras que en eje a escala 1:6 se utilizaron las de una aleación de aluminio de alta resistencia. La elección del material se debe a que el aluminio es más fácil de mecanizar que el acero, siendo una ventaja interesante si el modelo tiene geometría pequeña.

En vez de comprobar empíricamente las relaciones existentes entre las frecuencias de los modos de vibración de un eje real y otro a escala, se han obtenido los modos de vibración mediante el programa de simulación de elementos finitos ABAQUS. Con el mencionado programa se han desarrollado dos modelos distintos uno para el eje 1:1 y otro para el eje 1:6. Durante el desarrollo del modelo se han determinado cuales son las condiciones de contorno adecuadas que permiten determinar los modos de vibración en unas condiciones lo más parecidas posibles a las que tendría el eje real en su vida operativa. Una vez que se ha dispuesto de dos modelos válidos se han obtenido los cuarenta primeros modos de vibración del eje. La razón de obtener cuarenta modos se debe a que se pretende comprobar al menos cuatro modos de cada tipo. Al calcular los modos se observa la existencia de muchos modos transversales y obliga a calcular cuarenta modos para tener cuatro longitudinales y torsionales.

Posteriormente a la obtención de los modos de vibración se han clasificado los modos según sean longitudinales, transversales o torsionales. Una vez clasificados se han comparado modos homólogos, calculando su raíz para obtener la relación de semejanza existente entre ellos.

Utilizando la teoría de vibraciones en vigas esbeltas se han determinado las expresiones que establecen la relación de semejanza entre modelos semejantes, según el modo de vibración sea longitudinal, transversal o torsional. A continuación se han particularizado las expresiones con las relaciones de escala y propiedades de los materiales correspondiente, dando como resultado las relaciones de semejanza teóricas,

Por último se han comparado los valores considerados reales, obtenidos mediante la simulación de elementos finitos, con los teóricos, los resultantes de la teoría de vibraciones para vigas esbeltas.

2.2 Modelo eje-rueda

2.2.1 Geometría de los modelos

El objetivo de esta subsección es desarrollar dos modelos geométricos que permitan obtener los modos de vibración, el eje escala 1:1 y el de escala 1:6, lo suficientemente fiables para que la comprobación del análisis dimensional sea válida.

El primer paso es crear un modelo con la geometría del eje. El modelo geométrico ha sido creado mediante el programa de CAD "Solid Edge V 18" y guardado en un fichero de extensión igs. Posteriormente la geometría se ha importado al programa "ABAQUS" desde el fichero igs correspondiente. En el eje del modelo escala 1:1 se han utilizado las dimensiones que figuran en el plano del eje mencionado. En el caso del eje a escala 1:6, todas las dimensiones son 1/6 de las que figuran en el plano.

Parte de la geometría descrita en el plano ha sido simplificada. Esto se debe a que hay elementos geométricos en el eje que, en base a la teoría de vibraciones al suponer que varía poco la masa del eje y su rigidez, el efecto sobre los modos de vibración es pequeño. Sin embargo el mallado del modelo geométrico que se haría posteriormente será más complejo debido a estos elementos. Los elementos no incluidos son: un pequeño rebaje existente en el extremo de los asientos de rueda, un pequeño rebaje en el extremo del primer cambio de sección en el eje y los orificios alojados en los extremos del eje. La geometría base se encuentra en el plano del anexo.

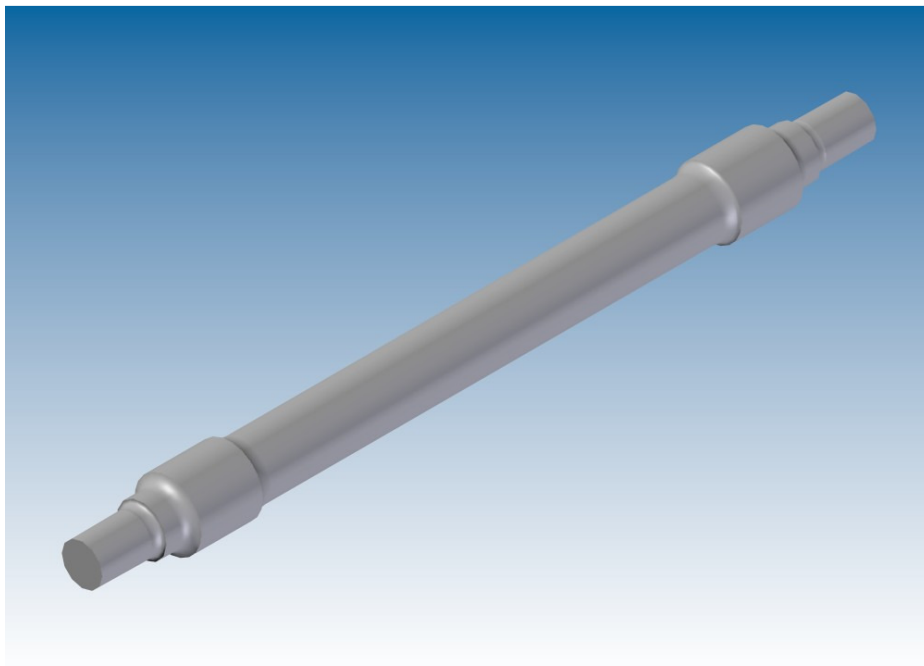


Figura 4. Modelo geométrico del eje a escala 1:1.

Durante el proceso de montaje, sobre el eje se instalan ruedas utilizando interferencia entre el eje y las ruedas como medio de fijación. Esto provoca que entre el eje y las ruedas se transfieran esfuerzos y haya compatibilidad de desplazamientos de tal manera que se comportan como un único componente mecánico. A este hecho hay que añadir que la masa de las ruedas y la del eje son comparables.

La ecuación que relaciona la masa con el volumen es:

$$m = V \cdot \rho$$

m es la masa del cuerpo, V es el volumen del cuerpo, y ρ es la densidad del material.

La relación entre la masa de las ruedas y la masa del eje suponiendo que son del mismo material:

$$\frac{m_{ruedas}}{m_{eje}} = 2 \cdot \frac{V_{rueda}}{V_{eje}}$$

V_{rueda} es el volumen de una rueda $0,92 \text{ m}^3$

V_{eje} es el volumen del eje: $0,62 \text{ m}^3$

$$\frac{m_{ruedas}}{m_{eje}} = 2,96$$

Teniendo en cuenta que la masa influye en los modos de vibración y que la masa de las ruedas son casi tres veces la del eje, se ha optado por incluir las ruedas en los modelos que se analizan mediante elementos finitos, por lo que los modos de vibración obtenidos siempre serán del conjunto eje ruedas. De este modo se espera que los resultados sean más parecidos a los que tendrá el eje en servicio.

El modelo geométrico de la rueda ha sido facilitado por el departamento, por lo que no ha sido necesario crearlo en “Solid Edge”.

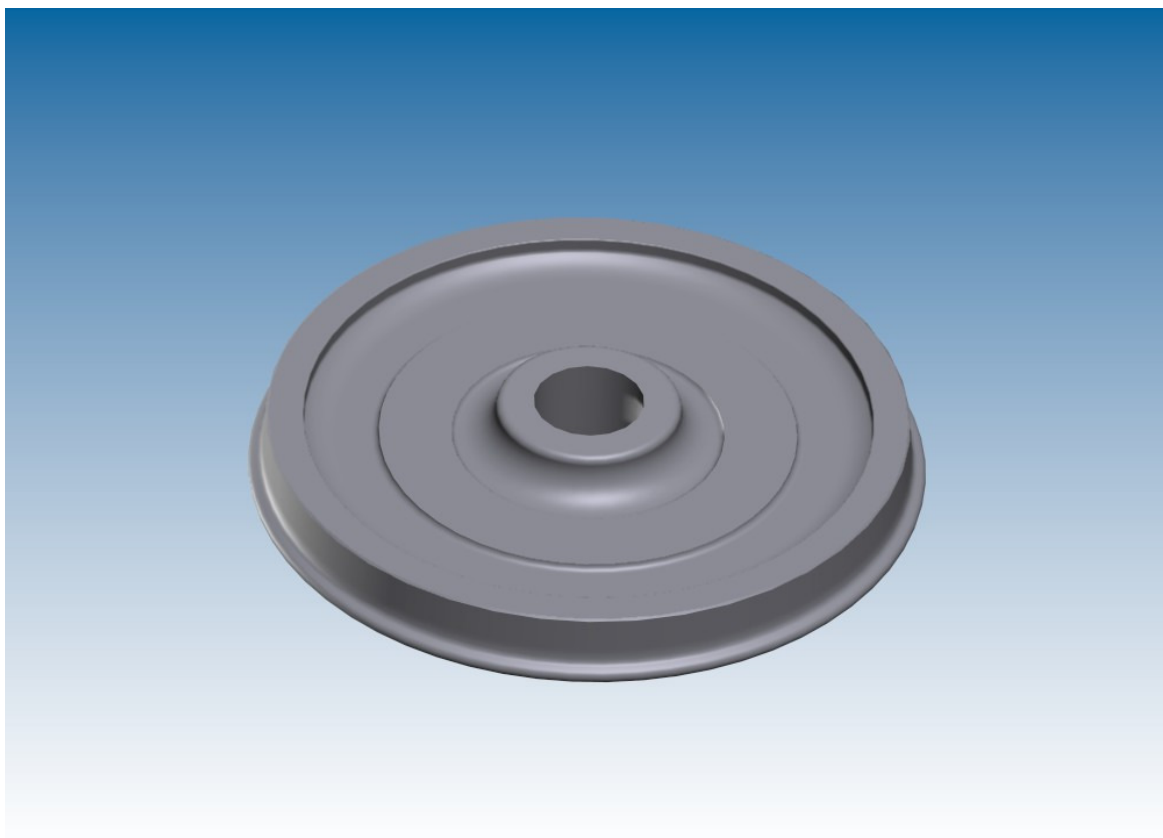


Figura 5. Modelo geométrico de la rueda a escala 1:1.

Una vez que se dispone de los ficheros igs con la geometría del eje y de las ruedas de escala 1:1 y 1:6, se han construido los correspondientes conjuntos eje – rueda 1:1 y 1:6. Esta tarea se ha realizado con el programa ABQUS importando la geometría de los ficheros igs [11]. Para definir completamente la geometría del conjunto se han aplicado las correspondientes asociaciones geométricas entre el eje y las ruedas. Ha sido necesario utilizar dos asociaciones por rueda. La primera asociación aplicada es la existencia de coaxialidad entre la superficie cilíndrica del agujero de la rueda y la superficie cilíndrica del asiento de rueda del eje. La segunda asociación establece que la posición del borde exterior del agujero de la rueda debe coincidir con el extremo exterior del asiento de rueda del eje.

Tras este último paso la geometría del modelo eje–rueda está completamente determinada y es posible continuar con la definición del modelo.

2.2.2 Caracterización del modelo eje-rueda

En esta subsección se definen las características que gobiernan el comportamiento del modelo geométrico.

El primer paso consiste en asignar las propiedades físicas requeridas para la realización de un análisis modal para comportamiento elástico lineal. Estas propiedades son: la densidad, el modulo elástico y el coeficiente de Poisson. En cada modelo se han aplicado las mismas propiedades tanto a las ruedas como al eje, por ser común que estén fabricados ambos del mismo material o de propiedades parecidas. Al modelo a escala 1:1 se le han asignado las propiedades de un acero al carbono A1N, mientras que al modelo a escala 1:6 se le han atribuido propiedades de una aleación de alta resistencia 7075-T6.

Propiedades	Acero A1N	Aluminio 7075-T6
<i>Densidad</i>	7,82 g/cm ³	2,81 g/cm ³
<i>Modulo elástico</i>	210 GPa	72 GPa
<i>Coficiente de Poisson</i>	0,3	0,33

Tabla 1. Propiedades de los materiales.

Mencionar que para poder utilizar ABAQUS hay que utilizar un sistema de unidades consistente apropiado. A continuación se detallan las unidades utilizadas para las correspondientes magnitudes.

Magnitud	Unidad
<i>Longitud</i>	mm
<i>Masa</i>	tn
<i>Tiempo</i>	s
<i>Fuerza</i>	N
<i>Densidad</i>	tn/mm ³
<i>Tensión</i>	MPa
<i>Módulo de elasticidad</i>	MPa

Tabla 2. Sistema de unidades utilizado en ABAQUS.

A continuación para establecer que las ruedas y el eje de cada modelo se comportan solidariamente, se han impuesto restricciones cinemáticas entre ambos. En concreto en el programa ABAQUS se ha utilizado para este propósito el módulo “interaction”. En el mencionado módulo se ha hecho uso de la función “create constraint” [11]. El tipo de restricción utilizada es “Tie”, para imponer que los desplazamientos de los nodos de la zona de contacto entre ambos elementos (los asientos de rueda), deben ser comunes en ambos elementos.

La razón de incluir las ruedas en el modelo se han explicado con anterioridad, tener en cuenta el efecto de las masas de las ruedas en los modos de vibración del eje, la frecuencia y desplazamientos de cada modo. Sin embargo no estamos interesados en los desplazamientos que la rueda tiene al vibrar. Solo nos interesan los que tiene el eje. Por

esta razón se ha realizado una simplificación del modelo. Las ruedas se consideraran rígidas. De esta forma la resolución del problema requerirá menos tiempo al ser más sencillo el modelo, manteniendo las ventajas de considerar la masa de las ruedas. Esta simplificación ha sido implementada en ABAQUS utilizando de nuevo la función “create constraint” del módulo “interacción”, pero esta vez es del tipo “rigid body” [11].

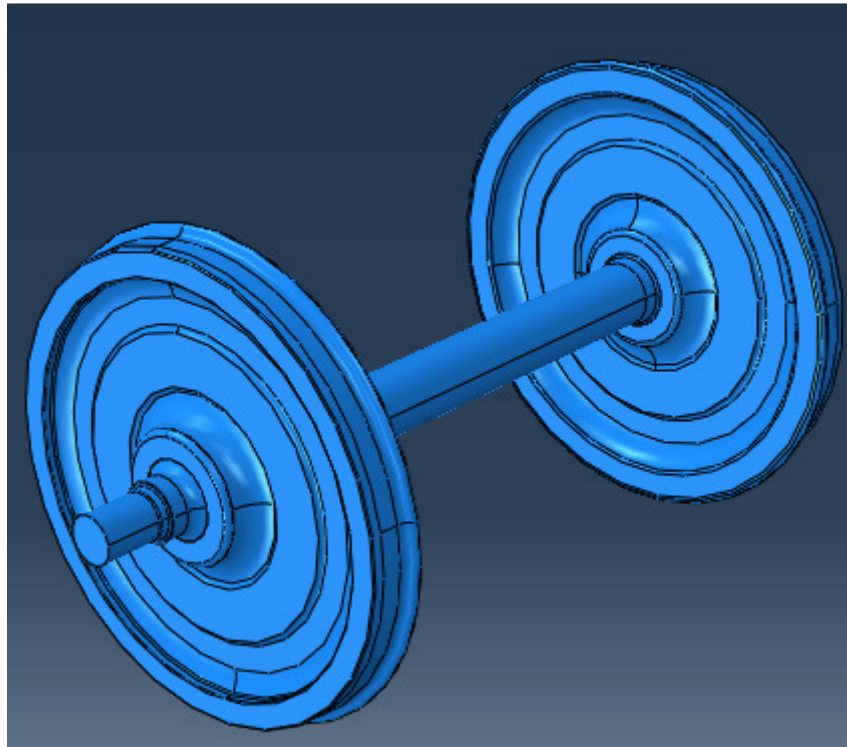


Figura 6. Modelo eje – rueda escala 1:1

2.2.3 Mallado del modelo 1:1

El último paso antes de finalizar el modelo y poder realizar los primeros cálculos con él es la discretización del modelo, es decir, reducirlo a un conjunto de elementos finitos conectados entre si por las relaciones correspondientes. Esta operación se conoce como mallado.

La calidad de la malla determinara la fiabilidad de los resultados obtenidos. Hay varios factores que afectan a la calidad de la malla o complejidad, entre los más importantes están el tipo de elemento, tipo de mallado y tamaño de los elementos. El tamaño se refiere a la longitud aproximada de las aristas del tipo de forma geométrica en que se discretiza el modelo [11]. Para comprobar que una malla tiene la calidad suficiente para el propósito del trabajo, se realizan cálculos con distintos tipos de mallados en los que el grado de complejidad es diferente y se comparan los resultados. Al comparar los resultados se miden las diferencias entre los diferentes resultados. Estas

diferencias disminuyen según aumenta la complejidad de la malla. Como criterio para determinar cuándo una malla es suficientemente compleja para el trabajo a realizar, se establece una diferencia máxima entre los resultados. Si la diferencia de entre los resultados entre dos mallados distintos es menor a ese valor, se considera que se tiene un mallado apto para el trabajo a realizar.

En el mallado del modelo eje - rueda se ha utilizado un mallado no estructurado con elementos tetraédricos (cuatro nodos lineal). Este tipo de elemento hace que el mallado sea más rápido que con otros elementos y proporciona resultados fiables para el propósito del trabajo, no siendo necesarios elementos de mayor complejidad.

Con el propósito de determinar el tamaño máximo de elemento que proporciona resultados fiables, se han realizado mallados con distinto tamaño de elemento, aunque el tamaño del elemento es el mismo para toda la geometría. Con estos mallados se han calculado los veinte primeros modos del modelo como sólido libre (sin condiciones de contorno). Se ha considerado que el tamaño óptimo de los elementos queda determinado, cuando al comparar las frecuencias de los modos de vibración de dos mallados de distinto tamaño, la diferencia entre ellas es menos al 1%. A continuación se muestran los resultados de los dos últimos mallados con su correspondiente diferencia para el modelo a escala 1:1 (los 6 primeros modos no se muestran por ser cero).

Modo de vibración	Frecuencia [Hz] elemento 20 mm	Frecuencia [Hz] elemento 17 mm	Diferencia %
7	41,97	41,77	0,48
8	59,543	59,4	0,24
9	59,573	59,416	0,26
10	128	127	0,79
11	128	127	0,79
12	386	384	0,52
13	386	385	0,26
14	443	444	0,23
15	895	892	0,34
16	896	892	0,45
17	1060	1055	0,47
18	1472	1464	0,55
19	1474	1464	0,68
20	1475	1465	0,68
21	1475	1467	0,55
22	1588	1583	0,32
23	1589	1583	0,38
24	1757	1756	0,06
25	2117	2109	0,38
26	2397	2388	0,38
27	2398	2389	0,38
28	3173	3160	0,41
29	3282	3271	0,34
30	3282	3271	0,34
31	3329	3327	0,06
32	3511	3499	0,34
33	3519	3503	0,46
34	4215	4201	0,33
35	4216	4201	0,36
36	4229	4214	0,36
37	4805	4795	0,21
38	4809	4799	0,21
39	4916	4913	0,06
40	5027	5007	0,40
41	5030	5010	0,40
42	5032	5014	0,36
43	5036	5017	0,38
44	5183	5167	0,31
45	5183	5167	0,31
46	5282	5261	0,40
47	6162	6144	0,29
48	6163	6145	0,29
49	6333	6310	0,36
50	6464	6460	0,06

Tabla 3. Comparación de frecuencias entre mallas con tamaños de 20 mm y 17 mm.

Tras estos resultados se demuestra que un mallado con elementos tetraédricos de tamaño 20 mm es apto para trabajar con el modelo.

Adicionalmente, teniendo en cuenta que las ruedas se comportan como sólidos rígidos, no requieren una malla con elementos del mismo tamaño que el eje. De hecho no importa que la geometría de la rueda se distorsione ligeramente debido a que los elementos sean de mayor tamaño. La variación del volumen sería pequeña y la masa se vería poco afectada, mientras que los tiempos de mallado y cálculo se reducirían. Con el propósito de comprobarlo se ha hecho un mallado donde los elementos del eje tienen un tamaño de 20 mm y los de las ruedas 80 mm. Al compararlos con los resultados obtenidos con una malla en todo el modelo de 20 mm se han obtenido las siguientes diferencias.

Modo de vibración	Frecuencia [Hz] elemento ruedas 20 mm	Frecuencia [Hz] elemento ruedas 80 mm	Diferencia %
7	41,97	41,58	0,94
8	59,543	59,043	0,85
9	59,573	59,07	0,85
10	128	127	0,79
11	128	127	0,79
12	386	386	0,00
13	386	386	0,00
14	443	440	0,68
15	895	897	0,22
16	896	897	0,11
17	1060	1061	0,09
18	1472	1475	0,20
19	1474	1478	0,27
20	1475	1478	0,20
21	1475	1479	0,27
22	1588	1591	0,19
23	1589	1592	0,19
24	1757	1759	0,11
25	2117	2119	0,09
26	2397	2401	0,17
27	2398	2402	0,17
28	3173	3176	0,09
29	3282	3287	0,15
30	3282	3288	0,18
31	3329	3336	0,21
32	3511	3515	0,11
33	3519	3522	0,09
34	4215	4221	0,14
35	4216	4223	0,17
36	4229	4232	0,07
37	4805	4822	0,35
38	4809	4829	0,41
39	4916	4930	0,28
40	5027	5043	0,32
41	5030	5046	0,32
42	5032	5049	0,34
43	5036	5053	0,34
44	5183	5191	0,15
45	5183	5192	0,17
46	5282	5288	0,11
47	6162	6172	0,16
48	6163	6173	0,16
49	6333	6340	0,11
50	6464	6483	0,29

Tabla 4. Comparación de frecuencias entre malla de 20 mm en todo el modelo y malla de 20 mm en el eje y 80 mm en las ruedas.

Queda probado por tanto que el modelo mallado con elementos tetraédricos con tamaño de 20 mm en el eje y de 80 mm en las ruedas es válido y más sencillo que el mallado con todos los elementos con tamaño de 20 mm.

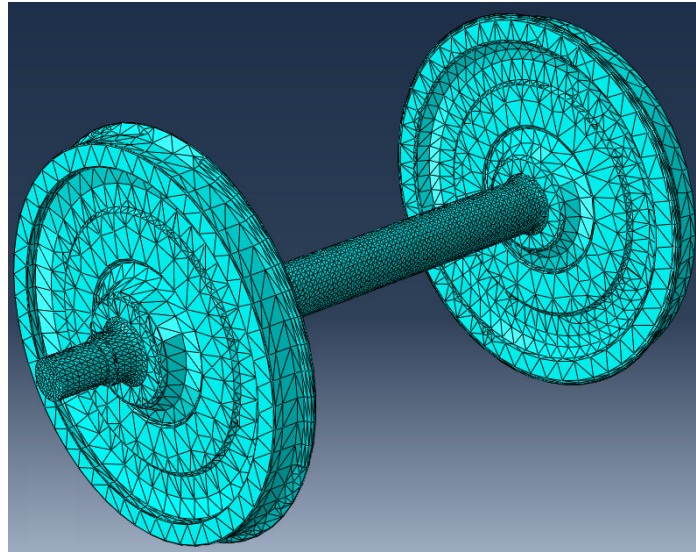


Figura 7. Modelo eje-rueda mallado con tamaño de elementos del eje 20 mm y de las ruedas 80 mm.

2.2.4 Mallado del modelo 1:6

Durante la realización del mallado del modelo se ha procedido de la misma 1:6 manera que en el modelo 1:1. Se han realizados cálculos de los veinte primeros modos de vibración utilizando mallas en las que el tamaño de los elementos se ha reducido progresivamente, hasta que la diferencia entre las frecuencias de los resultados es menos del 1%. A continuación se presentan los resultados de los dos últimos mallados del modelo 1:6 y su diferencia.

Modo de vibración	Frecuencia [Hz] elemento 3,3 mm	Frecuencia [Hz] elemento 2,8 mm	Diferencia %
7	243,22	241,97	0,52
8	349	348	0,29
9	349	348	0,29
10	752	749	0,40
11	752	750	0,27
12	2269	2259	0,44
13	2270	2260	0,44
14	2602	2604	0,08
15	5255	5233	0,42
16	5259	5233	0,50
17	6138	6111	0,44
18	8663	8608	0,64
19	8665	8613	0,60
20	8680	8614	0,77
21	8689	8616	0,85
22	9309	9272	0,40
23	9314	9273	0,44
24	10324	10319	0,05
25	12265	12210	0,45
26	14036	13976	0,43
27	14043	13978	0,47
28	18380	18298	0,45
29	19192	19126	0,35
30	19206	19129	0,40
31	19550	19537	0,07
32	20391	20260	0,65
33	20393	20286	0,53
34	24494	24400	0,39
35	24635	24542	0,38
36	24652	24544	0,44
37	28339	28275	0,23
38	28359	28292	0,24
39	28843	28823	0,07
40	29466	29321	0,49
41	29483	29326	0,54
42	29509	29344	0,56
43	29538	29358	0,61
44	30278	30165	0,37
45	30290	30172	0,39
46	30598	30452	0,48
47	35975	35853	0,34
48	35994	35862	0,37
49	36667	36537	0,36
50	37889	37869	0,05

Tabla 5. Comparación de frecuencias entre mallas con tamaños de 3,3 mm y 2,8 mm.

Tras estos resultados se demuestra que un mallado con elementos tetraédricos de tamaño 3,3 mm es apto para trabajar con el modelo.

En base a los mismos razonamientos mencionados en el mallado del modelo a escala 1:1, se ha incrementado el tamaño de los elementos de las ruedas, con el fin de simplificar el mallado. Los resultados de la comparación de las frecuencias de mallados de distinto tamaño en las ruedas se muestran a continuación:

Modo de vibración	Frecuencia [Hz] elemento ruedas 3,3 mm	Frecuencia [Hz] elemento ruedas 11 mm	Diferencia %
7	243,22	241	0,92
8	349	346	0,87
9	349	347	0,58
10	752	748	0,53
11	752	748	0,53
12	2269	2273	0,18
13	2270	2275	0,22
14	2602	2587	0,58
15	5255	5271	0,30
16	5259	5275	0,30
17	6138	6148	0,16
18	8663	8699	0,41
19	8665	8701	0,41
20	8680	8720	0,46
21	8689	8728	0,45
22	9309	9337	0,30
23	9314	9343	0,31
24	10324	10350	0,25
25	12265	12283	0,15
26	14036	14076	0,28
27	14043	14085	0,30
28	18380	18409	0,16
29	19192	19245	0,28
30	19206	19261	0,29
31	19550	19617	0,34
32	20391	20426	0,17
33	20393	20428	0,17
34	24494	24533	0,16
35	24635	24702	0,27
36	24652	24722	0,28
37	28339	28506	0,59
38	28359	28550	0,67
39	28843	28983	0,48
40	29466	29621	0,52
41	29483	29642	0,54
42	29509	29662	0,52
43	29538	29698	0,54
44	30278	30357	0,26
45	30290	30372	0,27
46	30598	30649	0,17
47	35975	36069	0,26
48	35994	36092	0,27
49	36667	36731	0,17
50	37889	38063	0,46

Tabla 6. Comparación de frecuencias entre malla de 3,3 mm en todo el modelo y 11 mm en las ruedas.

Se demuestra pues que el modelo mallado con elementos tetraédricos con tamaño de 3,3 mm en el eje y de 11 mm en las ruedas es válido.

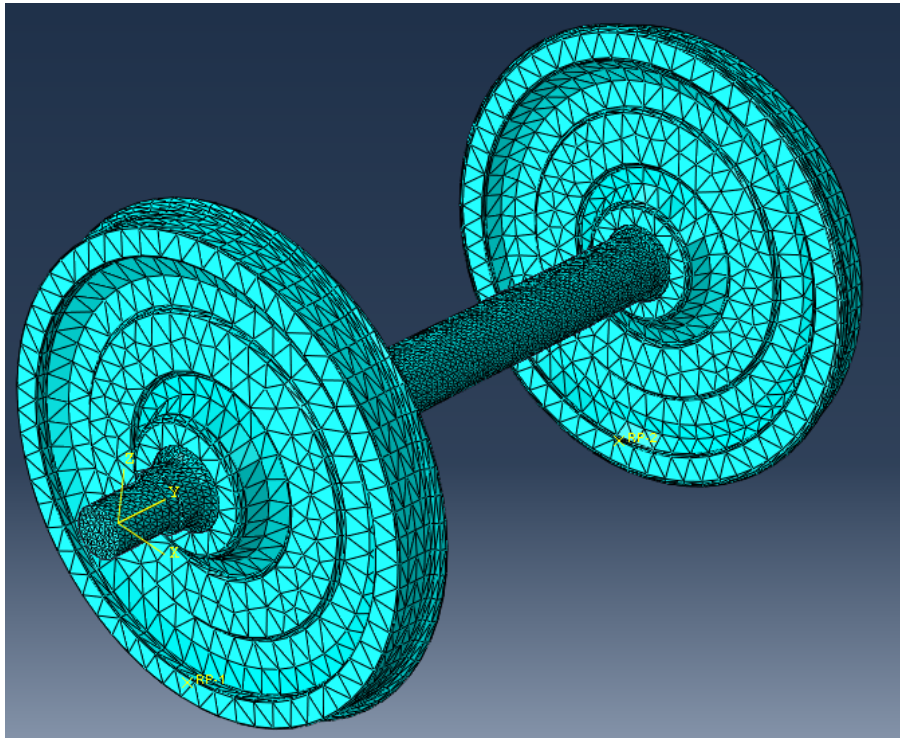


Figura 8. Modelo eje - rueda mallado con tamaño de elementos del eje 3,3 mm y de las ruedas 11 mm

Tras realizar los sucesivos pasos mencionados en esta sección, se han obtenido y comprobado la validez de los resultados de los dos modelos a escala 1:1 y 1:6, necesarios para los propósitos del presente proyecto. Estos modelos son los utilizados en las secciones siguientes, a excepción del capítulo 3. En dicho capítulo se ha requerido de una comprobación adicional desarrollada en el mismo capítulo.

2.3 Condiciones de contorno

En la sección anterior se han desarrollado los modelos necesarios para la obtención de los modos de vibración del eje. Pero aún falta por definir las condiciones de contorno que se van a establecer en los modelos. El propósito de las condiciones de contorno, es simular sobre el modelo las interacciones que recibirá el componente a estudio, cuando se encuentra integrado en su sistema y operando en condiciones habituales. En nuestro caso el conjunto eje rueda interactuará con la caja del tren y los raíles de la vía. Siguiendo en la línea de la anterior sección, se ha determinado el conjunto de condiciones de contorno que permiten simular el entorno real del componente, y obtener resultados fiables para el propósito del proyecto. A lo largo de la

presente sección se desarrolla el proceso realizado para la determinación de las condiciones de contorno que se aplicarán al modelo.

2.3.1 Planteamiento inicial

Como se ha comentado anteriormente el conjunto eje rueda interactúa con la caja del tren, y los raíles de la vía. En vista de la geometría del conjunto se ha considerado la aplicación de restricciones a los desplazamientos de los puntos de contacto de las ruedas con los raíles. Este hecho se basa en la siguiente observación. Dado que el radio de las ruedas es grande comparado con la longitud del eje, los desplazamientos relativos entre el punto de contacto entre la rueda y la vía y el asiento de rueda, permiten asemejarlo a un elemento que pivota sobre otro. Es decir, como si las ruedas pivotaran sobre los raíles y el eje se desplazara en consecuencia. Por otro lado la longitud de los extremos del eje, sobre los que se apoya la caja es mucho menor que el radio de las ruedas. Por esta razón los desplazamientos entre el extremo del eje y el asiento de rueda son menores que entre el punto de contacto de la rueda y el asiento de rueda. Partiendo de este planteamiento se ha establecido como idea principal que sobre el conjunto eje ruedas se apliquen restricciones de desplazamiento en los puntos de contacto entre las ruedas y los raíles que permitan pivotar a las ruedas sobre estos. En el caso de los extremos sobre los cuales se apoya la caja del tren no se aplicará ninguna restricción, debido a que los desplazamientos serían menores y se simplifica el modelo. Por otro lado la principal fuente de vibraciones proviene del contacto con los raíles, por lo que se considera más importante su efecto. Adicionalmente se puede observar otra ventaja de utilizar ruedas en el modelo geométrico, pues permiten establecer condiciones de contorno más realistas que de otra manera no se podrían aplicar.

Se ha establecido donde es más adecuado aplicar restricciones en los desplazamientos, pero aún es necesario determinar que restricciones en concreto son adecuadas.

Deducir a priori que tipo de restricciones de contorno son más realistas aplicar en las ruedas es difícil. No es sencillo intuir en qué medida va a afectar el uso de distintos tipos de restricciones a los modos de vibración. Dadas las circunstancias se han realizado varias simulaciones en ABAQUS del modelo eje rueda utilizando diferentes restricciones. Los resultados posteriormente se han comparado para identificar modos de vibración homólogos entre las diferentes condiciones de contorno. Finalmente se han comparado las frecuencias de los modos de vibración y las representaciones de los desplazamientos. Con esto se pretende determinar qué diferencias hay y si estas son importantes. Las simulaciones se han realizado con el modelo de acero a escala 1:1 y se han obtenido los cuarenta primeros modos de vibración. Se han calculado más modos de vibración de los que se utilizaran en la comprobación de las relaciones de semejanza, porque como se comprobará más adelante con distintas condiciones de contorno no se obtienen los mismos de vibración. Por esta razón en algunos casos la aparición de

ciertos modos que aparecen consecutivos mientras que en otro aparecen separados por otros modos, retrasando la aparición del mismo. Solo se han calculado y comparado resultados para el modelo a escala 1:1 presuponiendo que si se cumple el análisis dimensional, los resultados y las diferencias obtenidas con el modelo escala 1: 6 serán proporcionales a las del modelo a escala 1:1, teniendo como proporción la relación de semejanza correspondiente y no aportando nueva información para el propósito de esta sección. En caso de demostrarse al final de este capítulo que no es aplicable el análisis dimensional, la hipótesis anterior no sería válida y habría que replantear la forma de abordar las condiciones de contorno.

En primer lugar mencionar que se ha considerado oportuno que las restricciones sean puntuales, es decir aplicadas en un nodo en cada rueda por ser una aproximación realista a efectos de vibraciones. Por otro lado hay dos grandes cuestiones a resolver en cuanto a las restricciones. La primera es relativa a los desplazamientos lineales de los nodos considerados puntos de contacto entre rueda y vía. En principio para este aspecto solo se van considerar dos posibilidades: no tienen desplazamiento alguno o se permite que la distancia entre los puntos de contacto de las ruedas pueda variar en la dirección del axial del eje. La razón de no valorar desplazamientos en otras direcciones se debe a que se perdería la idea de pivotación de las ruedas sobre las vías y además podría complicar las comparaciones de las relaciones dimensionales al final del capítulo. Por otro lado el valorar que se pueda desplazar en la dirección axial del eje, responde al hecho de incluir las vibraciones inducidas por variaciones del ancho de vía. La segunda cuestión es relativa a los giros permitidos en los nodos. Está claro que para permitir la pivotación de las ruedas se tiene que dejar libre la rotación en torno al eje de pivotación. En cuanto a los otros dos giros posibles no está tan claro, pero si se pretende que se obtengan modos de vibración torsionales, se tiene que permitir algún giro. Planteadas las líneas principales se han empleado varias combinaciones de restricciones. Se agrupan principalmente en dos grupos. En el primero no se considera desplazamiento lineal en ninguna dirección y en el segundo se permite variación de la distancia entre los nodos de los puntos de contacto en la dirección axial. Esto se ha implementado restringiendo todos los desplazamientos lineales en uno de los nodos de contacto y en el otro permitiendo el desplazamiento solo en la dirección correspondiente. Para cada una de estas configuraciones se han simulado versiones diferentes en función de los giros permitidos. Las combinaciones han sido rotaciones en los ejes x , x ; y , x ; y ; z . Además se han calculado los modos de vibración de sólido libre y también considerando que no hay desplazamiento ni giro alguno en los nodos. Esos resultados se comparan con los otros a pesar de haber descartado estas condiciones de contorno, con el propósito de tener una idea más clara de la influencia que tienen de las condiciones de contorno.

2.3.2 Alternativas en las condiciones de contorno

Para seguir un patrón de referencia, las diferencias porcentuales calculadas entre los modos se han hecho respecto de la frecuencia correspondiente al modo en configuración de sólido libre. Para seguir un patrón de referencia, las diferencias porcentuales calculadas entre los modos se han hecho respecto de la frecuencia correspondiente al modo en configuración de sólido libre. Solo hay una excepción debido a que no existe en sólido libre un modo de vibración análogo al obtenido en otras restricciones. A pesar de esto se ha seguido considerando como lógico utilizar el sólido rígido como referencia además de solo tener esta excepción a diferencia de combinaciones. Los modos ortogonales se han omitido en la comparación dado que la frecuencia entre modos ortogonales es muy pequeña y no aporta nada al análisis. Los modos de vibración se han identificado y clasificado según sean longitudinales, transversales o torsionales para valorar la influencia que tienen las condiciones de contorno en cada uno de ellos. Además esta clasificación será necesaria cuando se calculen las relaciones dimensionales.

Por último aclarar que la imagen incluida en cada tipo de modo corresponde a la representación del modo de vibración de referencia, es decir, al de sólido libre. Esta imagen se ha incluido para facilitar la identificación y comprensión de la información, pero en las otras combinaciones de restricciones difieren ligeramente. El código de colores expresa el desplazamiento sufrido por cada nodo de vibración respecto de la posición de equilibrio. La imagen corresponde a la posición de los nodos transcurrido $\frac{1}{4}$ del ciclo de vibración, cuando los desplazamientos son máximos. Los desplazamientos son mayores según la tonalidad sea más rojiza y menores si se aproximan al azul. Los desplazamientos están escalados 264:1. No se ha incluido una leyenda de colores en las imágenes por tener estas una finalidad orientativa y no ofrecería una información útil.

Modos longitudinales

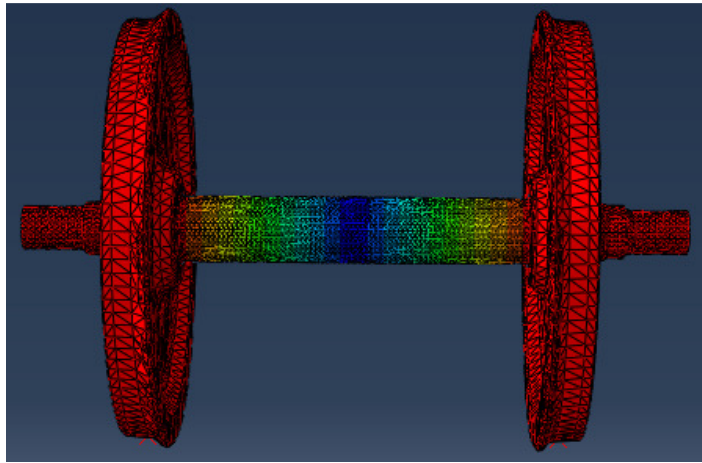


Figura 9. Representación modo longitudinal 9 sólido libre 442 Hz (sin modos análogos).

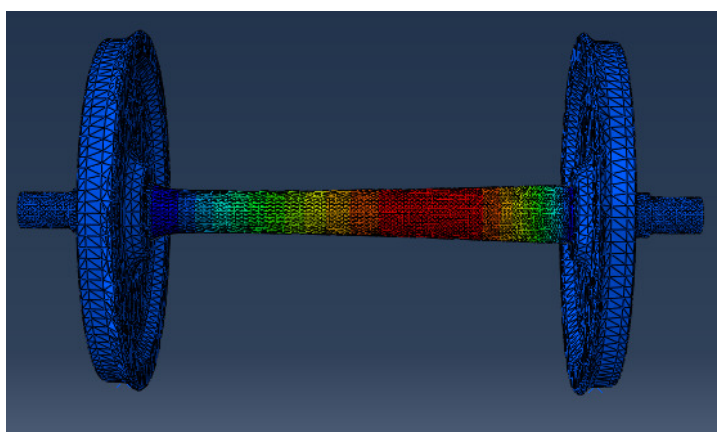


Figura 10. Representación modo longitudinal 24 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	24	1758	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	15	1747	0,62
<i>Deslizante rotación x,y</i>	17	1747	0,62
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	19	1747	0,62
<i>No deslizante x</i>	14	1735	1,3
<i>No deslizante x,y</i>	16	1735	1,3
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	18	1735	1,3
<i>Restricción total</i>	12	1637	6,68

Tabla 7. Comparación de frecuencias modo longitudinal 24 sólido libre.

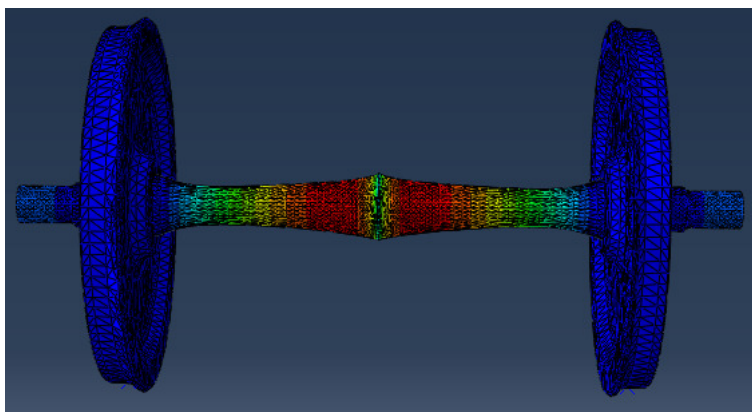


Figura 11. Representación modo longitudinal 31 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	31	3332	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	22	3325	0,21
<i>Deslizante rotación x,y</i>	24	3325	0,21
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	26	3325	0,21
<i>No deslizante x</i>	21	3319	0,39
<i>No deslizante x,y</i>	23	3319	0,39
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	25	3319	0,39
<i>Restricción total</i>	19	3263	2,07

Tabla 8. Comparación de frecuencias modo longitudinal 31 sólido libre.

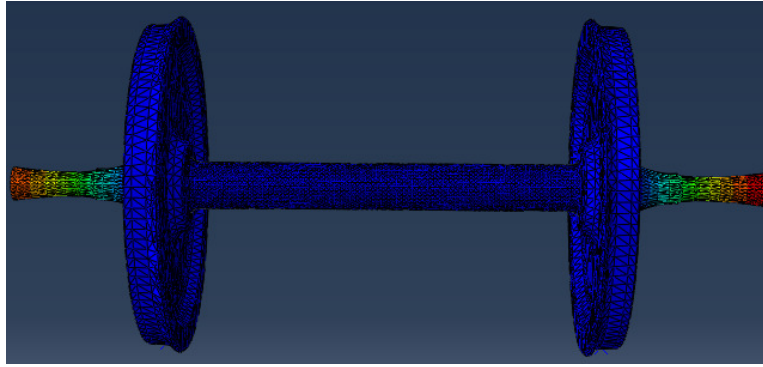


Figura 12. Representación modo longitudinal 38 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	38	4818	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	29	4815	0,62
<i>Deslizante rotación x,y</i>	31	4815	0,62
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	33	4815	0,62
<i>No deslizante x</i>	27	4796	0,45
<i>No deslizante x,y</i>	29	4796	0,45
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	31	4796	0,45
<i>Restricción total</i>	-	-	-

Tabla 9. Comparación de frecuencias modo longitudinal 38 sólido libre.

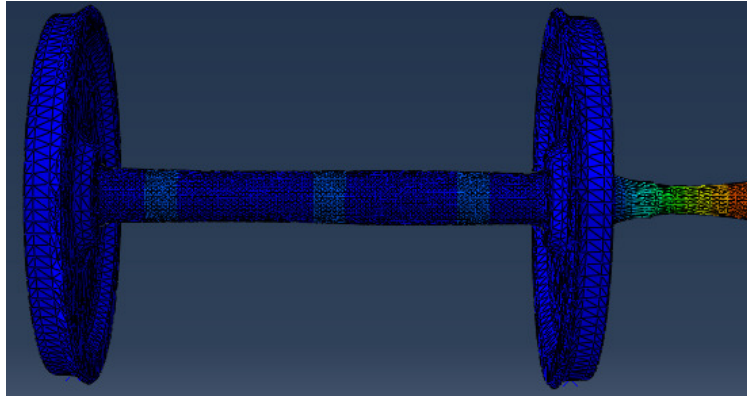


Figura 13. Representación modo longitudinal 37 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	37	4813	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	28	4796	0,35
<i>Deslizante rotación x,y</i>	30	4796	0,35
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	32	4796	0,35
<i>No deslizante x</i>	28	4796	0,35
<i>No deslizante x,y</i>	30	4796	0,35
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	32	4796	0,35
<i>Restricción total</i>	25	4701	2,32

Tabla 10 Comparación de frecuencias modo longitudinal 37 sólido libre.

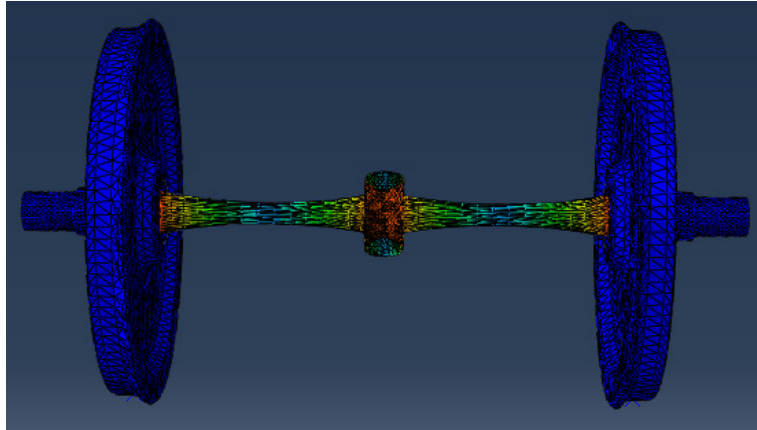


Figura 14. Representación modo longitudinal 50 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	50	6473	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	41	6468	0,07
<i>Deslizante rotación x,y</i>	43	6468	0,07
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	45	6468	0,07
<i>No deslizante x</i>	40	6463	0,15
<i>No deslizante x,y</i>	42	6463	0,15
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	44	6463	0,15
<i>Restricción total</i>	38	6427	0,71

Tabla 11. Comparación de frecuencias modo longitudinal 50 sólido libre.

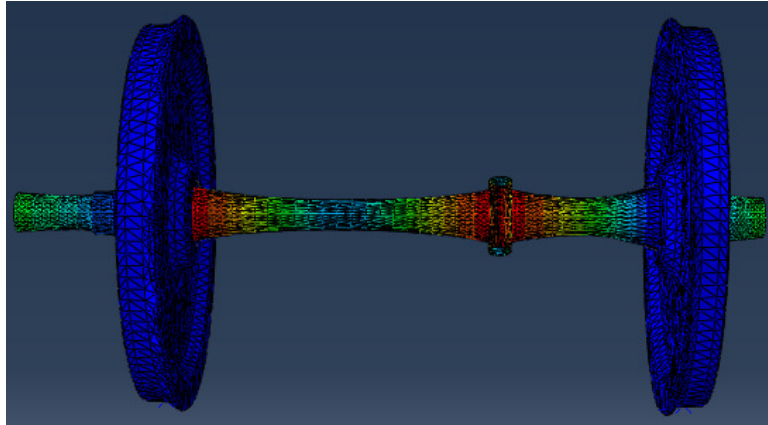


Figura 15. Representación modo longitudinal 39 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	39	4923	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	30	4915	0,16
<i>Deslizante rotación x,y</i>	32	4915	0,16
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	34	4915	0,16
<i>No deslizante x</i>	29	4907	0,32
<i>No deslizante x,y</i>	31	4907	0,32
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	33	4907	0,32
<i>Restricción total</i>	27	4881	0,85

Tabla 12. Comparación de frecuencias modo longitudinal 39 sólido libre.

Modos transversales

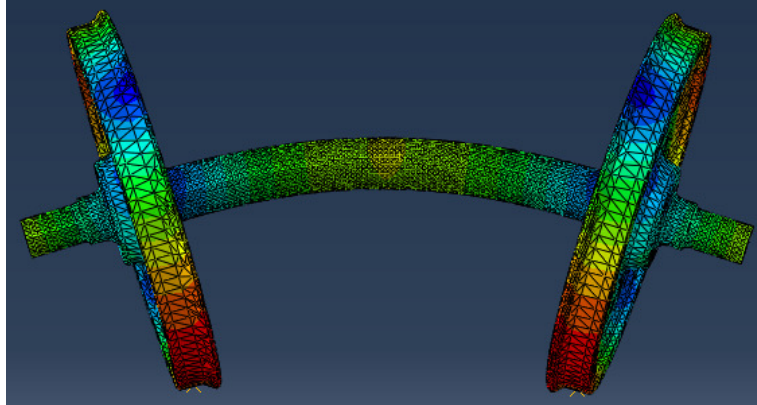


Figura 16. Representación modo transversal 8 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	8	59,28	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	1	25	57
<i>Deslizante rotación x,y</i>	1	22,12	62
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	3	25,12	62
<i>No deslizante x</i>	-	-	-
<i>No deslizante x,y</i>	-	-	-
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	54	59,03	0,4
<i>Restricción total</i>	-	-	-

Tabla 13. Comparación de frecuencias modo transversal 8 sólido libre.

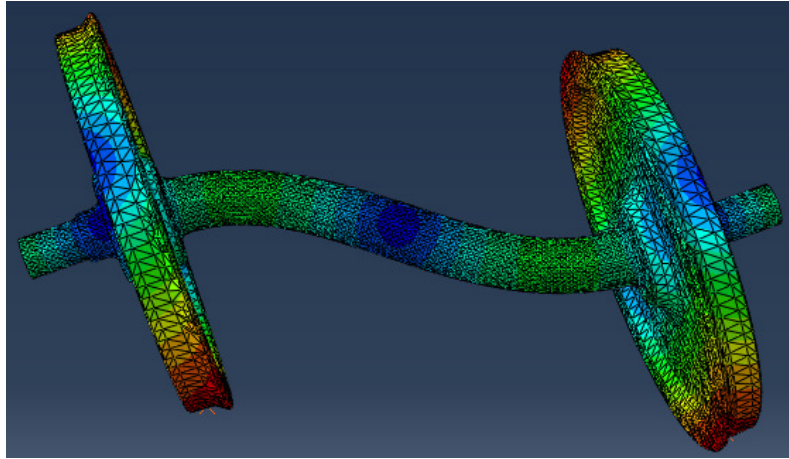


Figura 17. Representación modo transversal 10 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	10	127	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	2	95	25
<i>Deslizante rotación x,y</i>	4	95	25
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	5	95	25
<i>No deslizante x</i>	1	53	58
<i>No deslizante x,y</i>	3	53	58
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	3	53	58
<i>Restricción total</i>	-	-	-

Tabla 14. Comparación de frecuencias modo transversal 10 sólido libre.

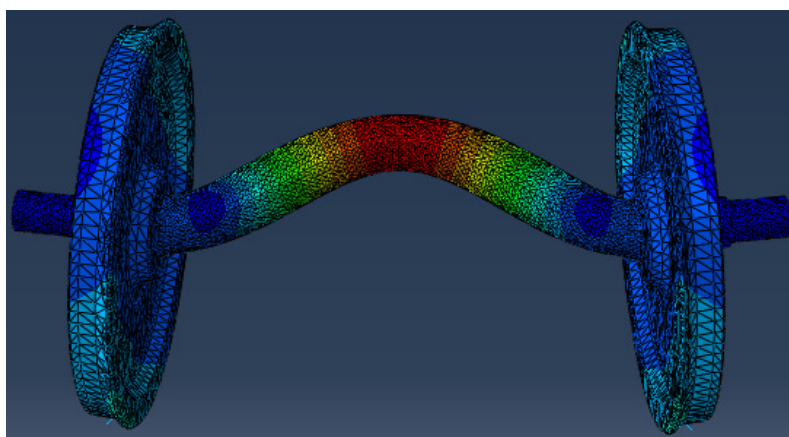


Figura 18. Representación modo transversal 12 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	12	386	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	3	334	13,47
<i>Deslizante rotación x,y</i>	5	347	10,1
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	7	351	9,06
<i>No deslizante x</i>	2	319	17,35
<i>No deslizante x,y</i>	4	319	17,35
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	6	319	17,35
<i>Restricción total</i>	1	333	17,73

Tabla 15. Comparación de frecuencias modo transversal 12 sólido libre.

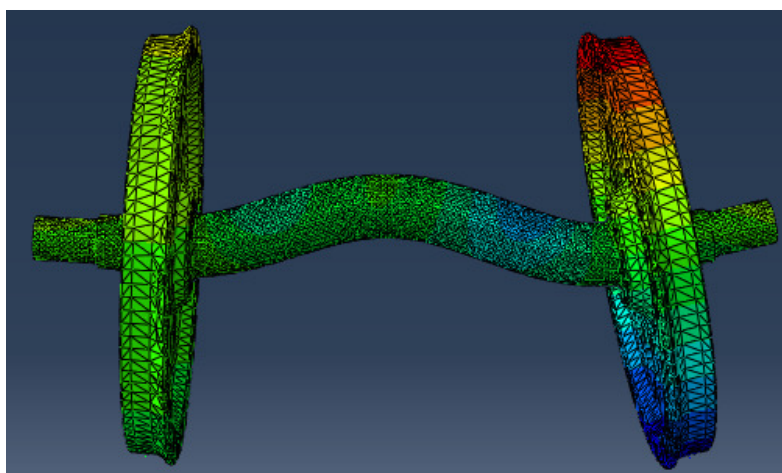


Figura 19. Representación modo transversal 5 deslizante rotación en eje x .

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	-	-	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	5	423	-
<i>Deslizante rotación x,y</i>	7	423	-
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	9	423	-
<i>No deslizante x</i>	4	413	2,36
<i>No deslizante x,y</i>	6	413	2,36
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	8	413	2,36
<i>Restricción total</i>	-	-	-

Tabla 16. Comparación de frecuencias modo transversal 5 deslizante rotación en eje x .

En el caso no existe modo análogo con comportamiento de sólido libre. Por lo tanto se ha utilizado como frecuencia de referencia la correspondiente a las condiciones en las que se permite desplazamiento axial y rotación en el eje x .

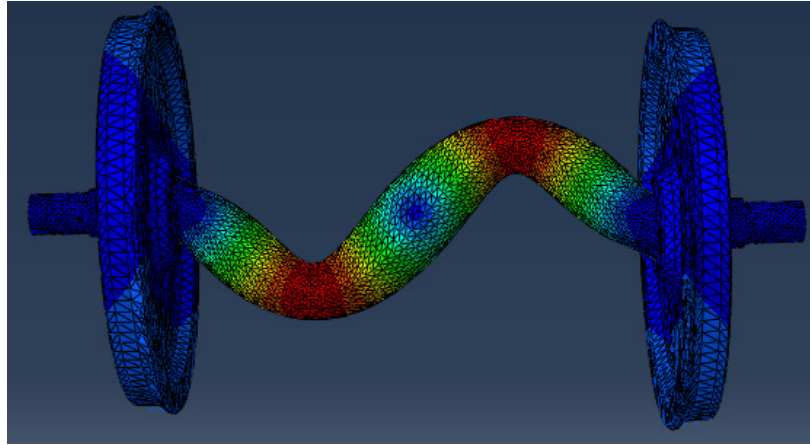


Figura 20. Representación modo transversal 15 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	15	896	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	6	860	4,01
<i>Deslizante rotación x,y</i>	8	870	2,91
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	10	870	2,91
<i>No deslizante x</i>	5	860	4,01
<i>No deslizante x,y</i>	7	863	3,68
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	9	863	3,68
<i>Restricción total</i>	3	860	4,01

Tabla 17. Comparación de frecuencias modo transversal 15 sólido libre.

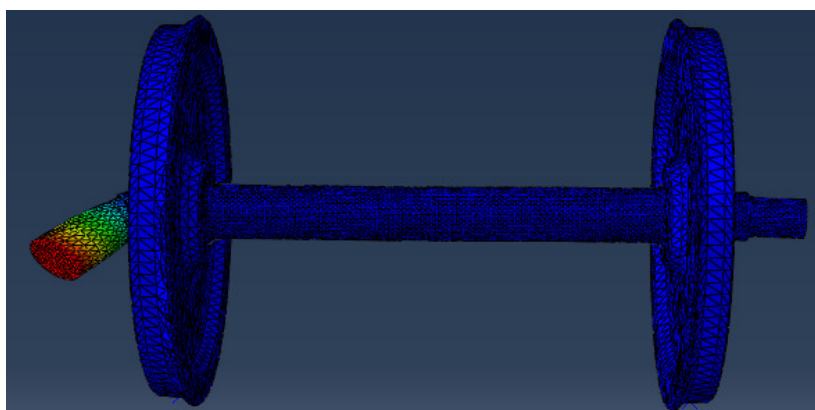


Figura 21. Representación modo transversal 15 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	18	1473	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	9	1444	1,96
<i>Deslizante rotación x,y</i>	12	1453	1,35
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	15	1469	0,27
<i>No deslizante x</i>	8	1444	1,96
<i>No deslizante x,y</i>	12	1454	1,28
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	14	1469	0,27
<i>Restricción total</i>	6	1444	1,96

Tabla 18. Comparación de frecuencias modo transversal 18 sólido libre.

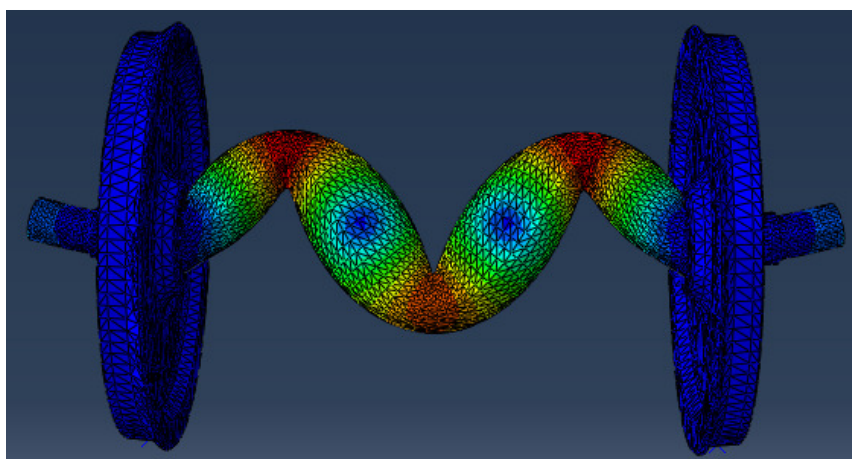


Figura 22. Representación modo transversal 22 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	22	1590	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	13	1560	1,88
<i>Deslizante rotación x,y</i>	15	1566	1,5
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	17	1566	1,5
<i>No deslizante x</i>	12	1560	1,88
<i>No deslizante x,y</i>	14	1562	1,76
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	16	1562	1,76
<i>Restricción total</i>	10	1560	1,88

Tabla 19. Comparación de frecuencias modo transversal 22 sólido libre.

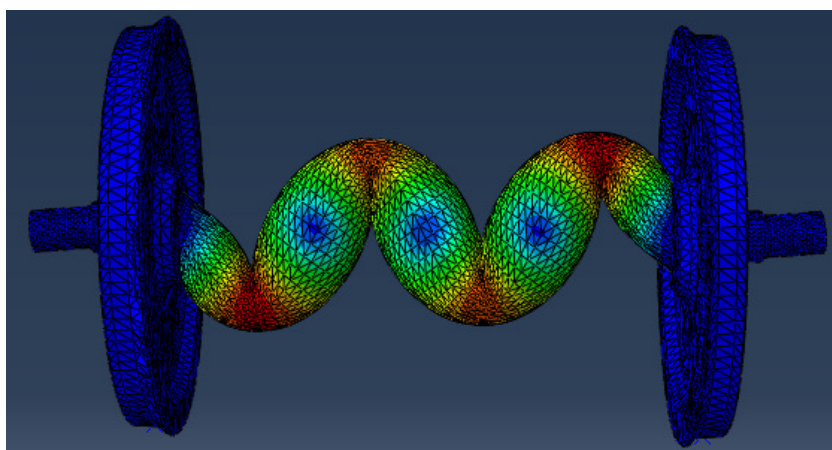


Figura 23. Representación modo transversal 26 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	26	2399	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	17	2374	1,04
<i>Deslizante rotación x,y</i>	19	2378	0,87
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	21	2378	0,87
<i>No deslizante x</i>	16	2374	1,04
<i>No deslizante x,y</i>	18	2375	1
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	20	2375	1
<i>Restricción total</i>	14	2373	1,08

Tabla 20. Comparación de frecuencias modo transversal 22 sólido libre.

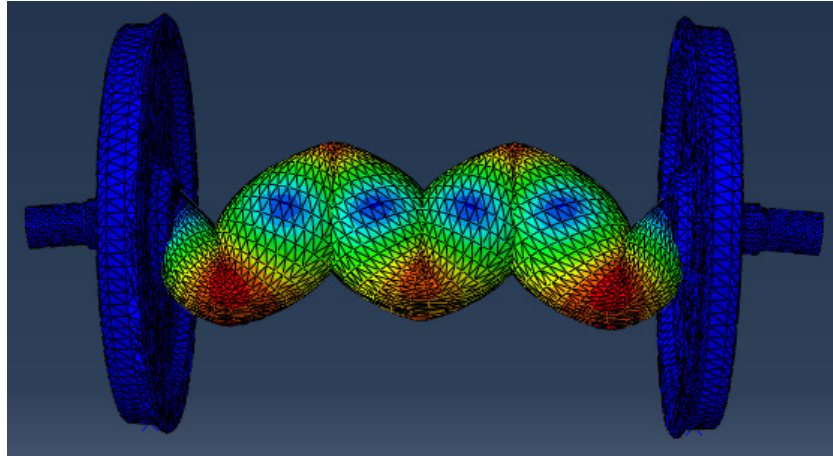


Figura 24. Representación modo transversal 26 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	29	3285	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	20	3261	0,73
<i>Deslizante rotación x,y</i>	22	3264	0,63
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	24	3264	0,63
<i>No deslizante x</i>	19	3261	0,73
<i>No deslizante x,y</i>	21	3261	0,73
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	23	3261	0,73
<i>Restricción total</i>	17	3261	0,73

Tabla 21. Comparación de frecuencias modo transversal 22 sólido libre.

Modos torsionales

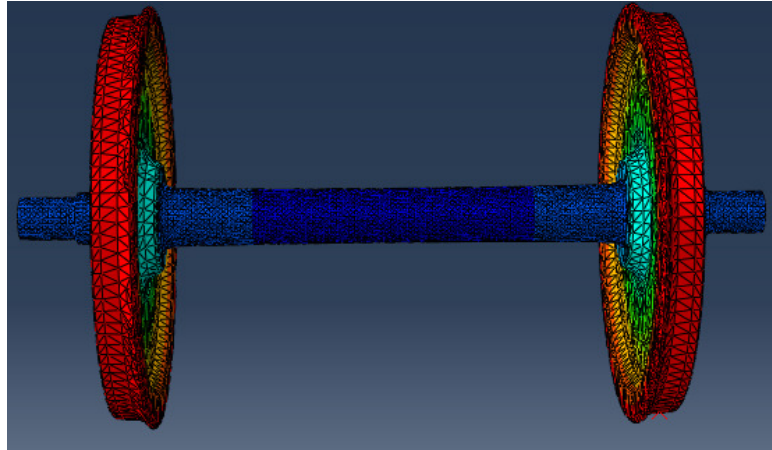


Figura 25. Representación modo torsional 7 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	7	41	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	-	-	-
<i>Deslizante rotación x,y</i>	-	-	-
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	-	-	-
<i>No deslizante x</i>	-	-	-
<i>No deslizante x,y</i>	-	-	-
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	2	22	46
<i>Restricción total</i>	-	-	-

Tabla 22. Comparación de frecuencias torsional 7 sólido libre.

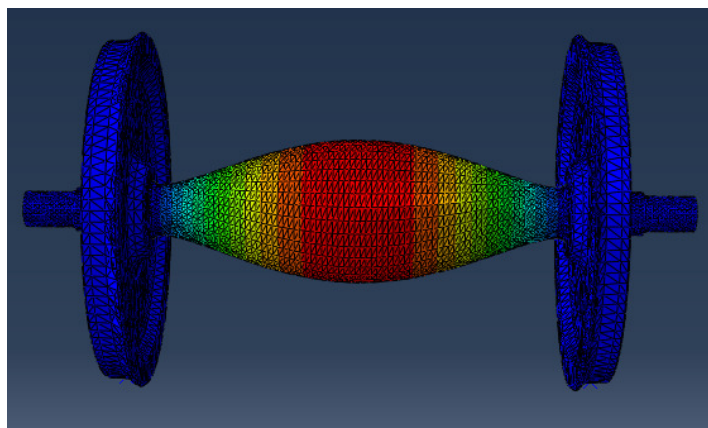


Figura 26. Representación modo torsional 17 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	17	1060	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	8	1058	0,18
<i>Deslizante rotación x,y</i>	10	1059	0,09
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	12	1059	0,09
<i>No deslizante x</i>	7	1058	0,18
<i>No deslizante x,y</i>	9	1059	0,09
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	11	1059	0,09
<i>Restricción total</i>	5	1058	0,18

Tabla 23. Comparación de frecuencias torsional 17 sólido libre.

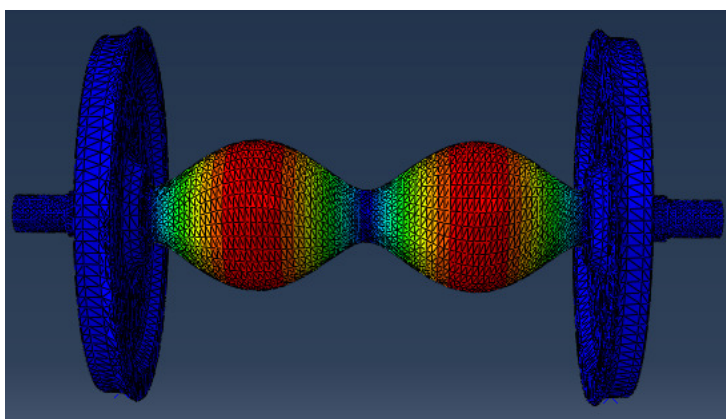


Figura 27. Representación modo torsional 25 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	25	2118	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	16	2117	0,04
<i>Deslizante rotación x,y</i>	118	2117	0,04
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	20	2117	0,04
<i>No deslizante x</i>	15	2117	0,04
<i>No deslizante x,y</i>	17	2117	0,04
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	19	2117	0,04
<i>Restricción total</i>	13	2117	0,04

Tabla 24. Comparación de frecuencias torsional 25 sólido libre.

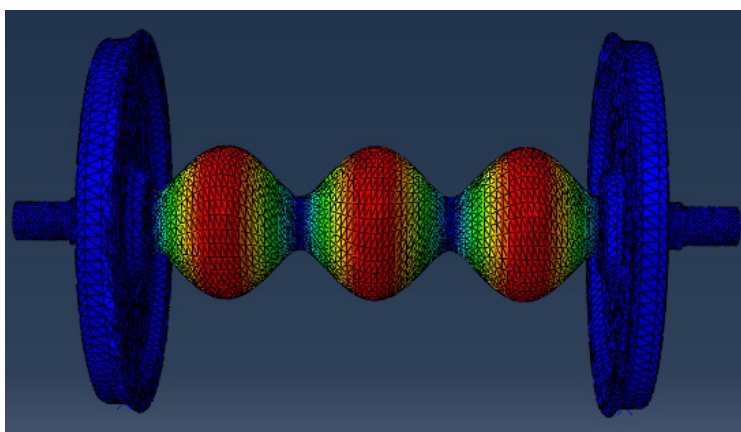


Figura 28. Representación modo torsional 28 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	28	3174	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	19	3174	0
<i>Deslizante rotación x,y</i>	21	3174	0
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	23	3174	0
<i>No deslizante x</i>	18	3174	0
<i>No deslizante x,y</i>	20	3174	0
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	22	3174	0
<i>Restricción total</i>	16	3174	0

Tabla 25. Comparación de frecuencias torsional 28 sólido libre.

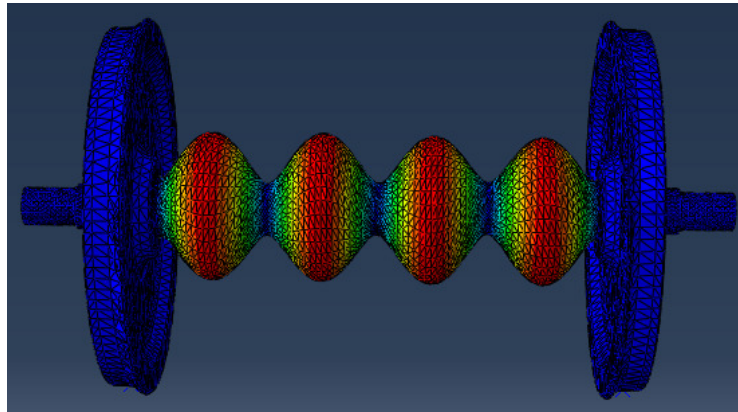


Figura 29. Representación modo torsional 16 sólido libre.

Restricciones	Modo de vibración	Frecuencia [Hz]	
<i>Sólido libre</i>	16	4230	Diferencia %
<i>Deslizante rotación x</i>	27	4230	0
<i>Deslizante rotación x,y</i>	29	4230	0
<i>Deslizante rotación x,y,z</i>	31	4230	0
<i>No deslizante x</i>	26	4230	0
<i>No deslizante x,y</i>	28	4230	0
<i>No deslizante rotación x,y,z</i>	30	4230	0
<i>Restricción total</i>	24	4230	0

Tabla 26. Comparación de frecuencias torsional 16 sólido libre.

2.3.3 Comparación de resultados y conclusión

A la vista de los resultados se observa que las frecuencias tienen una fuerte dependencia del modo de vibración en particular, a aparte de las condiciones de contorno. En algunos modos las diferencias entre las distintas condiciones de contorno se encuentran en valores inferiores al 5 % mientras que en otros llegan a ser del 50 %. Aún así hay una tendencia clara a ser mayores las diferencias con las frecuencias de sólido libre y restricción total con respecto a las demás. Este resultado era esperado. Si se atiende al tipo de modo (longitudinal, transversal y torsional) las diferencias entre las distintas restricciones son mayores en los modos transversales. Esto se debe a que en dichos modos al observar la representación de sólido libre, se observa giros grandes en los nodos de contacto. Como consecuencia al restringir los giros en otras condiciones de contorno, los desplazamientos son muy diferentes y por tanto la frecuencia también sufre una variación importante. El efecto contrario se observa claramente en la mayoría de los modos torsionales. A excepción del primer modo torsional, en los demás es el eje la parte que tiene desplazamientos y las ruedas no tienen ninguno. Por esta razón las

frecuencias no dependen de las condiciones de contorno. De la misma manera en los modos longitudinales se observan diferencias menores si se comparan con los modos transversales, la explicación es la misma. Los giros en ciertos ejes de rotación son pequeños en los nodos de contacto y los desplazamientos no se ven poco afectados por las condiciones de contorno. Otra observación importante es que por lo general las diferencias entre los modos en los que se permiten desplazamiento en la dirección axial y que no son muy pequeñas.

Tras el análisis de los resultados se ha decidido utilizar como condiciones de contorno giros libres en todos los ejes de rotación en los nodos de contacto y no se permite desplazamiento longitudinal alguno en los nodos. La decisión se basa en varias razones. En primer lugar con estas condiciones de contorno se obtienen modos análogos a todos los modos encontrados en otras condiciones de contorno, por lo que no se pierde ningún modo que podría encontrarse en la realidad. Por otro lado la diferencia entre permitir desplazamiento axial o no es muy pequeña, sin embargo la representación aparece algo “distorsionada” cuando se permite desplazamiento porque no hay simetría en las condiciones de contorno. Esto dificulta su identificación con los modos equivalentes. Las diferencias de resultados en función del grado de libertad de giro son solo importantes en algunos modos y es difícil predecir si el hecho de estar las ruedas encajadas entre los raíles en la realidad, que es evidente que restringen el giro, es a semejable a una restricción total. Por ello se ha permitido el giro libre en los nodos de contacto.

Después de haber realizado todas las simulaciones y análisis explicados en esta sección y en la previa se ha definido y comprobado un modelo y unas condiciones de contorno válidas para el propósito de este capítulo. Con el final de esta sección se está en disposición de los medios para comprobar la validez del análisis dimensional en el eje.

2.4 Análisis dimensional

El análisis dimensional permite expresar las ecuaciones que definen un fenómeno físico mediante expresiones en las que solo aparecen involucradas relaciones adimensionales de las variables del fenómeno. En esta sección se pretende demostrar si es aplicable en el análisis modal de un eje ferroviario. En concreto se analiza el número adimensional que representa la razón entre las frecuencias de los modos de vibración de dos ejes ferroviarios semejantes, es decir, la relación de semejanza entre los ejes. En primer lugar se ha determinado teóricamente la relación de semejanza. Con ese propósito se ha hecho uso de la teoría de vibraciones mecánicas aplicada a vigas esbeltas. Como hipótesis de partida se ha supuesto que el eje se comporta como una viga esbelta a efectos de vibraciones mecánicas. Utilizando la teoría de vibraciones mecánicas se han obtenido las expresiones de la relación de semejanza para las frecuencias de los modos longitudinales, transversales y torsionales y determinado su

valor teórico. Posteriormente se han calculado mediante ABAQUS los veinte primeros modos de vibración tanto para el modelo a escala 1:1 como para 1:6. A continuación se han clasificado los modos según sean longitudinales, transversales o torsionales. Finalmente se han calculado las relaciones de semejanza de los modelos y comparadas con las teóricas.

2.4.1 Desarrollo de las ecuaciones de movimiento y frecuencias naturales de una viga

Cálculo de los modos de vibración longitudinales de una viga

Considérese una viga elástica de longitud l de sección variable. Las fuerzas que actúan sobre la superficie de un elemento de la barra de longitud dx como se muestra en la Figura 30 son P y $P + dP$ donde [9]:

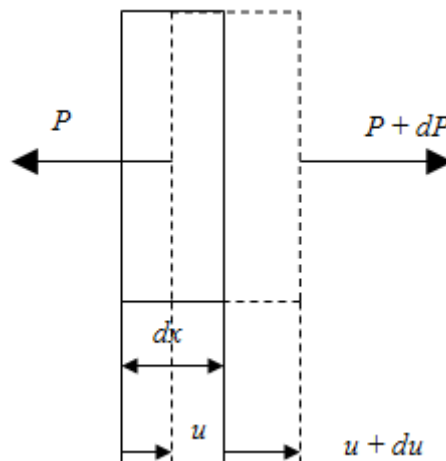


Figura 30. Diagrama de fuerzas de un elemento de longitud diferencial de una viga sometida a tracción. [Mechanical vibrations 2ª Edición Singiresu S. Rao]

$$P = \sigma A = EA \frac{\partial u}{\partial x}$$

Ec. 70

Donde σ es la tensión normal sobre la sección, E es el módulo elástico del material de la viga, A el área de la sección de la viga, u el desplazamiento axial y $\partial u / \partial x$ la deformación axial. Si $f(x, t)$ es la fuerza exterior por unidad de longitud aplicada sobre la barra, la resultante de fuerzas sobre el elemento de la barra en la dirección axial

$$(P + dP) + f dx - P = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Ec. 71

Donde ρ es la densidad del material de la barra. Utilizando $dP = (\partial P / \partial x) dx$ y la ecuación Ec. 71 la ecuación de movimiento de las vibraciones longitudinales forzadas de una viga esbelta es

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EA(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + f(x, t) = \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

Ec. 72

Considerando que la barra es uniforme de sección constante:

$$EA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Ec. 73

La ecuación para vibraciones libres [1]:

$$c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Ec. 74

Donde

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Ec. 75

La solución general de la ecuación diferencia es:

$$u(x, t) = \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sen \frac{\omega x}{c} \right) (C \cos \omega t + D \sen \omega t)$$

Ec. 76

Utilizando el método de separación de variables:

$$u(x, t) = U(x)T(t)$$

Ec. 77

Donde $U(x)$ es la amplitud de del modo de vibración que solo depende de x y $T(t)$ que solo depende del tiempo. Si se conoce la posición y velocidad iniciales se pueden establecer como condiciones iniciales.

$$u(x, t = 0) = u_0(x)$$

Ec. 78

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = \dot{u}_0(x)$$

Ec. 79

A continuación se muestran algunos ejemplos de las condiciones de contorno más habituales.

Condiciones de contorno en los extremos	Condiciones de contorno	Ecuación de la frecuencia	Modo de vibración	Frecuencia natural
<i>Empotramiento en un extremo</i>	$\frac{\partial u}{\partial t}(l, t) = 0$ $u(0, t) = 0$	$\cos \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \text{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2l}$ $n = 0, 1, 2 \dots$
<i>Extremos libres</i>	$\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial t}(l, t) = 0$	$\text{sen} \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$ $n = 0, 1, 2 \dots$
<i>Bi-empotrada</i>	$u(0, t) = 0$ $u(l, t) = 0$	$\text{sen} \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$ $n = 0, 1, 2 \dots$

Tabla 27. Condiciones de contorno en modos longitudinales de una viga [Mechanical vibrations 2ª Edición Singiresu S .Rao][1].

Cálculo de los modos de vibración transversales de una viga esbelta

Considérese el diagrama de sólido libre de la Figura 31, donde $M(x, t)$ es el momento flector , $V(x, t)$ es el esfuerzo cortante y $f(x, t)$ es la fuerza externa por unidad de longitud aplicada sobre la viga. Las fuerzas de inercia de un elemento tiene la forma [9]:

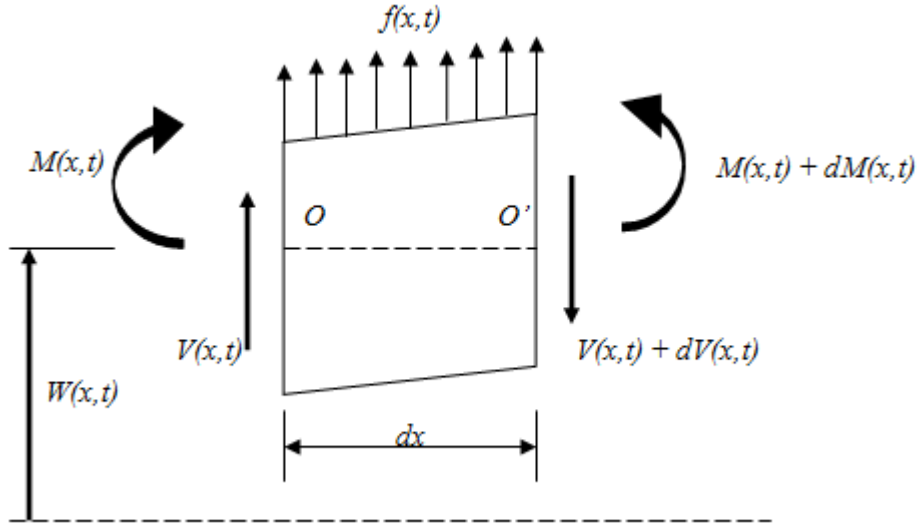


Figura 31. Diagrama de fuerzas de un elemento de longitud diferencial de una viga esbelta sometida a flexión. [Mechanical vibrations 2ª Edición Singiresu S .Rao][1].

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

Ec. 80

La ecuación dinámica en la dirección z resulta:

$$-(V + dv) + f(x, t)dx + V = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

Ec. 81

Donde ρ es la densidad del material $A(x)$ el área de la sección transversal de la viga. La ecuación del momento cinético en el eje y respecto del punto O de la Figura 31:

$$(M + dM) - (V + dV)dx + f(x, t)dx \frac{dx}{2} - M = 0$$

Ec. 82

Introduciendo:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

Ec. 83

Despreciando los términos de segundo orden de dx se puede reescribir de la siguiente forma:

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

Ec. 84

Incluyendo la relación entre el esfuerzo cortante y el momento flector $V = \partial M / \partial x$ la ecuación Ec. 84 resulta:

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

Ec. 85

Haciendo uso de la teoría de vigas esbeltas (viga de *Euler-Bernoulli*), la relación entre el momento flector y los desplazamientos queda [9]:

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t)$$

Ec. 86

Donde E es el módulo elástico e I el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto del eje y . La ecuación dinámica para vibraciones transversales forzadas es:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t)$$

Ec. 87

La ecuación Ec. 87 se simplifica para una viga homogénea de sección constante:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t)$$

Ec. 88

Para vibraciones libres $f(x, t) = 0$:

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0$$

Ec. 89

Donde:

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Ec. 90

La ecuación Ec. 89 contiene una derivada parcial de segundo orden respecto del tiempo y una derivada parcial de cuarto orden respecto de x . Para obtener una solución definida de $w(x,t)$ se necesitan dos condiciones iniciales y cuatro condiciones de contorno. Normalmente los desplazamientos transversales y la velocidad se especifican como $w_0(x)$ y $\dot{w}_0(x)$ en $t = 0$, por lo que las condiciones iniciales se representan:

$$w(x, t = 0) = w_0(x)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t = 0) = \dot{w}_0(x)$$

Ec. 91

La solución para el caso de vibraciones no forzadas se puede hallar mediante el método de separación de variables:

$$w(x, t) = W(x)T(t)$$

Ec. 92

Sustituyendo Ec. 92 en la ecuación Ec. 89:

$$\frac{c^2}{W(x)} \cdot \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \cdot \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = a = \omega^2$$

Ec. 93

Donde $a = \omega^2$ es una constante positiva. La ecuación Ec. 92 puede reescribirse en dos ecuaciones:

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0$$

Ec. 94

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0$$

Ec. 95

Donde:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$$

Ec. 96

La solución de la ecuación Ec. 95 se puede expresar como:

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Ec. 97

Donde A y B son constantes determinadas por las condiciones iniciales. Para la ecuación Ec. 94 la solución es de la forma:

$$W(x) = C e^{sx}$$

Ec. 98

Donde C y s son constantes obtenidas de la ecuación auxiliar:

$$s^4 - \beta^4 = 0$$

Ec. 99

Las raíces de esta ecuación son:

$$s_{1;2} = \pm\beta \quad s_{3;4} = \pm i\beta$$

La solución a la ecuación Ec. 94 es:

$$W(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x}$$

Ec. 100

Donde C_1 , C_2 , C_3 y C_4 son constantes. La ecuación Ec. 100 se puede reescribir de la siguiente manera [1]:

$$W(x) = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sen(\beta x) + C_3 \cosh(\beta x) + C_4 \sinh(\beta x)$$

Ec. 101

O bien de esta otra forma:

$$W(x) = C_1 [\cos(\beta x) + \cosh(\beta x)] + C_2 [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)] \\ + C_3 [\sen(\beta x) + \sinh(\beta x)] + C_4 [\sen(\beta x) - \sinh(\beta x)]$$

Ec. 102

Las constantes C_1 , C_2 , C_3 y C_4 son en cada ecuación distintas. Las constantes se obtienen utilizando las condiciones de contorno en la ecuación correspondiente. Las frecuencias naturales se obtienen con la siguiente expresión:

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l_c)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l_c^4}}$$

Ec. 103

Donde l_c es la longitud característica de la viga. A continuación se muestran algunos ejemplos de condiciones de contorno.

Extremos libres:

$$\text{Momento flector} \quad M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{Esfuerzo cortante} \quad V = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$$

Ec. 104

Viga bi-apoyada en los extremos:

$$\text{Desplazamientos verticales en los extremos } w = 0$$

$$\text{Momento flector} \quad M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Ec. 105

Extremo empotrado

$$\text{Desplazamientos verticales en los extremos } w = 0$$

$$\text{Giro de la sección} \quad \theta = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Ec. 106

En la Tabla 28 siguiente se exponen los resultados para algunas condiciones de contorno típicas:

Condiciones de contorno en los extremos	Valor de $\beta_n l$	Ecuación de la frecuencia	Modo de vibración
<i>Extremos libres</i>	$\beta_1 l = 4,730$ $\beta_2 l = 7,853$ $\beta_3 l = 10,995$ $\beta_4 l = 14,137$ $\beta l = 0$ (modos sólido rígido)	$\text{sen} \beta_n = 0$	$W_n(x) = C_n [\text{sen} \beta_n x + \text{senh} \beta_n x + \alpha_n (\cos \beta_n x + \cosh \beta_n x)]$ Donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{sen} \beta_n l - \text{senh} \beta_n l}{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l} \right)$
<i>Empotramiento en un extremo</i>	$\beta_1 l = 1,875$ $\beta_2 l = 4,694$ $\beta_3 l = 7,854$ $\beta_4 l = 10,995$	$\cos(\beta_n l) \cdot \cosh(\beta_n l) = -1$	$W_n(x) = C_n [\text{sen} \beta_n x - \text{senh} \beta_n x - \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)]$ Donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{sen} \beta_n l - \text{senh} \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} \right)$
<i>Bi-empotrada</i>	$\beta_1 l = 4,730$ $\beta_2 l = 7,853$ $\beta_3 l = 10,995$ $\beta_4 l = 14,137$	$\cos(\beta_n l) \cdot \cosh(\beta_n l) = 1$	$W_n(x) = C_n [\text{senh} \beta_n x - \text{sen} \beta_n x - \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ Donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{senh} \beta_n l - \text{sen} \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} \right)$
<i>Bi-apoyada simple</i>	$\beta_1 l = \pi$ $\beta_2 l = 2\pi$ $\beta_3 l = 3\pi$ $\beta_4 l = 4\pi$	$\text{sen} \beta_n = 0$	$W_n(x) = C_n \text{sen}(\beta_n x)$

Tabla 28. Condiciones de contorno en modos transversales de una viga esbelta. [Mechanical vibrations 2ª Edición Singiresu S .Rao][1].

Cálculo de los modos de vibración torsionales de una viga

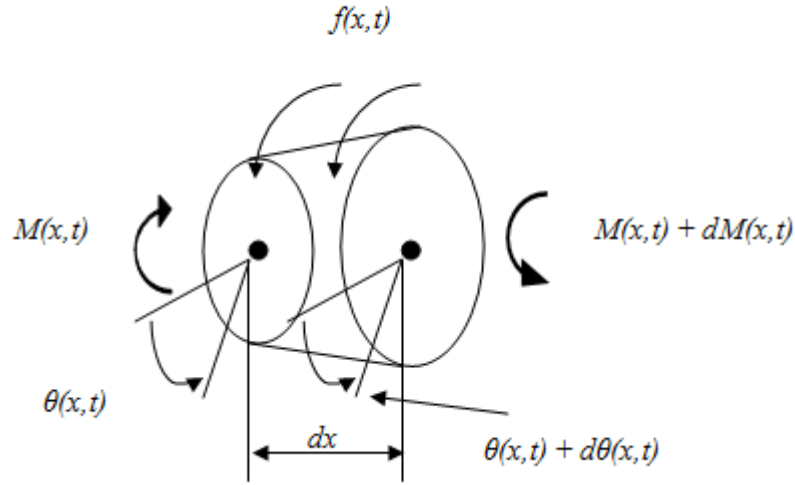


Figura 32. Diagrama de fuerzas de un elemento de longitud diferencial de una viga sometida a torsión. [Mechanical vibrations 2ª Edición Singiresu S. Rao][1].

En la Figura 32 se representa un elemento perteneciente a una viga sometido a un momento torsor exterior $f(x,t)$ por unidad de longitud. Si $\theta(x,t)$ es el ángulo de torsión de una sección transversal, la relación entre el giro de la sección y el momento torsor $M_t(x,t)$ es [9]:

$$M_t(x,t) = GJ(x) \frac{\partial \theta}{\partial x}(x,t)$$

Ec. 107

Donde G es el módulo de cortadura y $GJ(x)$ es la rigidez a torsión. Siendo $J(x)$ el momento polar de inercia de la sección transversal. Si el momento másico polar de inercia de la viga por unidad de longitud es J_0 , el par de inercia actuante sobre el elemento de longitud dx es:

$$J_0 = dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

Ec. 108

Si $f(x,t)$ es el par torsor externo por unidad de longitud, la segunda ecuación de Newton proporciona la siguiente ecuación de movimiento:

$$(M_t + dM_t) + f dx - M_t = J_0 dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

Ec. 109

Sustituyendo dM_t por:

$$dM_t = \frac{\partial M_t}{\partial x} dx$$

y utilizando la ecuación Ec. 109 resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[GJ(x) \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) \right] + f(x, t) = J_0(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(x, t)$$

Ec. 110

Si se particulariza la ecuación Ec. 110 para una viga homogénea de sección constante:

$$GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = J_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(x, t)$$

Ec. 111

En el caso de vibraciones no forzadas:

$$c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(x, t)$$

Ec. 112

Donde:

$$c = \sqrt{\frac{GJ}{J_0}}$$

Ec. 113

Si la viga tiene una sección uniforme $J_0 = \rho J$:

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Ec. 114

Como condiciones iniciales se pueden utilizar el ángulo y velocidad angular en $t = 0$:

$$\theta(x, t = 0) = \theta_0(x)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t = 0) = \dot{\theta}_0(x)$$

Ec. 115

La solución general de la ecuación Ec. 112 es [1]:

$$\theta(x, t) = \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c} \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t)$$

Ec. 116

A continuación se muestran algunas soluciones para condiciones de contorno comunes en la Tabla 29:

Condiciones de los extremos	Condiciones de contorno	Ecuación de la frecuencia	Modo de vibración	Frecuencia natural
<i>Empotrado un extremo</i>	$\frac{\partial \theta}{\partial t}(l, t) = 0$	$\cos \frac{\omega l}{c} = 0$	$\theta(x) = C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n = \frac{(2n+1)}{2l}$
<i>Extremos libres</i>	$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0$ $\frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c}$	$\theta(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$
<i>Bi-empotrada</i>	$\theta(0, t) = 0$ $\theta(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c}$	$\theta(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$

Tabla 29. Condiciones de contorno en modos torsionales de una viga. [Mechanical vibrations2ª Edición Singiresu S.Rao][1].

2.4.2 Cálculo de las relaciones de semejanza

La geometría del modelo eje-rueda y las condiciones de contorno no se corresponden con los ejemplos habituales, por lo que nos se dispone de la solución correspondiente de las frecuencias naturales. Sin embargo, como el elemento principal se a semeja a una viga de sección constante, y las ruedas se han considerado rígidas porque solo queremos incluir el efecto de su masa y no sus desplazamientos se han utilizado se han utilizado las expresiones para vigas uniformes. Como no disponemos de las soluciones para las condiciones de contorno específicas se va a utilizar las soluciones correspondientes a sólido libre.

Para valorar el efecto del uso de expresiones de las frecuencias naturales de unas condiciones de contorno diferentes, se han calculado con ABAQUS los modos de vibración del modelo eje-rueda sin condiciones de contorno, como sólido libre. Posteriormente se ha calculado las relaciones de semejanza con los resultados obtenidos y comparados con los valores teóricos de las expresiones, esta vez, si acordes con sus condiciones de contorno. Con esta comprobación se pretende dar mayor solidez a las conclusiones de este proyecto.

Relación de semejanza en modos de vibración longitudinales

La frecuencia natural de los modos de vibración longitudinales para una viga como sólido libre está determinada por la expresión:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l_c}$$

Ec. 117

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Ec. 118

Donde ω_n es la frecuencia natural del modo n , n es el número de modo ($n = 1, 2, 3...$), l_c es la longitud característica de la viga, E es el módulo elástico y ρ la densidad. La razón entre las frecuencias de dos modos longitudinales semejantes es:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\frac{n\pi c_1}{l_{c1}}}{\frac{n\pi c_0}{l_{c0}}} = \frac{c_1 l_{c0}}{c_0 l_{c1}}$$

Ec. 119

Sustituyendo c por Ec. 118 :

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\frac{E_1}{\rho_1}}{\frac{E_0}{\rho_0}}} \cdot \frac{l_{c0}}{l_{c1}}$$

Ec. 120

La relación adimensional entre las frecuencias naturales queda:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{E_1}{E_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_1}} \cdot \frac{l_{c0}}{l_{c1}}$$

Ec. 121

En nuestro caso particular las propiedades del acero del modelo a escala 1:1 son $E_0 = 210$ GPa y $\rho_0 = 7,8$ g/cm³ y las propiedades de la aleación de aluminio del modelo a escala 1:6 son $E_1 = 72$ GPa y $\rho_1 = 2,81$ g/cm³. La longitud característica equivalente para la geometría de los modelos no es conocida, pero tampoco se necesita. En la ecuación Ec. 121 figura la proporción entre ellas que se corresponde con la relación de escala entre los modelos $l_{c0}/l_{c1} = 6/1$. Sustituyendo en (45):

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{72 \text{ GPa}}{210 \text{ GPa}} \quad \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{7,8 \text{ g/cm}^3}{2,81 \text{ g/cm}^3} \quad \frac{l_{c0}}{l_{c1}} = 6$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 5,84$$

Relación de semejanza en modos de vibración transversales

La frecuencia natural de los modos de vibración transversales para una viga como sólido libre está determinada por la expresión:

$$\omega_n = (\beta l_c)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l_c^4}}$$

Ec. 122

Donde ω_n es la frecuencia natural del modo n , β es un valor definido en la ecuación Ec. 96, l_c es la longitud característica de la viga, E es el módulo elástico, I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga, ρ es la densidad y A es el área de la sección transversal. La razón entre las frecuencias de dos modos transversales semejantes es:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{(\beta l_{c1})^2 \sqrt{\frac{E_1 I_1}{\rho_1 A_1 l_{c1}^4}}}{(\beta l_{c0})^2 \sqrt{\frac{E_0 I_0}{\rho_0 A_0 l_{c0}^4}}}$$

Ec. 123

Sabiendo que $(\beta l_c)^2$ es un valor que solo depende del modo de vibración en particular y su valor en modos análogos es el mismo:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{E_1 I_1 \rho_0 A_0 l_{c0}^4}{E_0 I_0 \rho_1 A_1 l_{c0}^4}}$$

Ec. 124

La relación adimensional entre las frecuencias naturales es:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \left(\frac{l_{c0}}{l_{c1}}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E_1 I_1 \rho_0 A_0}{E_0 I_0 \rho_1 A_1}}$$

Ec. 125

Particularizando para nuestro modelo $E_0 = 210 \text{ GPa}$, $\rho_0 = 7,8 \text{ g/cm}^3$, $E_1 = 72 \text{ GPa}$, $\rho_1 = 2,81 \text{ g/cm}^3$ y $l_{c0}/l_{c1} = 6$. Al igual que ocurría con la longitud característica en el caso de los modos transversales, tampoco conocemos los valores del momento de inercia y el área equivalentes para los modelos. Sin embargo si conocemos sus la magnitud de sus unidades, $[L^4]$ el momento de inercia y $[L^2]$ el área. Esto implica que el cociente de los momentos de inercia y de las áreas son razones entre longitudes. Por lo tanto los modelos están determinados por la relación de escala como se muestra a continuación:

$$\frac{l_{c0}}{l_{c1}} = 6 \quad \frac{I_1}{I_0} = \frac{l_{c1}^4}{l_{c0}^4} = \frac{L_{c1}^4}{(6L_{c1})^4} = \frac{1}{6^4} \quad \frac{A_0}{A_1} = \frac{l_{c0}^2}{l_{c1}^2} = \frac{(6L_{c1})^2}{L_{c1}^2} = 36$$

Incluyendo:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{72 \text{ GPa}}{210 \text{ GPa}} \quad \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{7,8 \text{ g/cm}^3}{2,81 \text{ g/cm}^3} \quad \frac{l_{c0}}{l_{c1}} = 6$$

La relación de semejanza para modos transversales entre los modelos:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 5,84$$

Relación de semejanza en modos de vibración torsionales

La frecuencia natural de los modos de vibración longitudinales para una viga como sólido libre está determinada por la expresión:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l_c}$$

Ec. 126

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Ec. 127

La densidad es ρ , G es el módulo de cortadura que para un material elástico lineal isótropo. Se define:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Ec. 128

Donde E es el módulo elástico y ν el coeficiente de Poisson. En la expresión Ec. 126 ω_n es la frecuencia natural del modo n , n es el número de modo ($n = 1, 2, 3, \dots$), l_c es la longitud característica de la viga, ρ la densidad. La razón entre las frecuencias de dos modos longitudinales semejantes es:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\frac{n\pi c_1}{l_{c1}}}{\frac{n\pi c_0}{l_{c0}}} = \frac{c_1 l_{c0}}{c_0 l_{c1}}$$

Ec. 129

Sustituyendo c por Ec. 127:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\frac{G_1}{\rho_1}}{\frac{G_0}{\rho_0}}} \cdot \frac{l_{c0}}{l_{c1}}$$

Ec. 130

Finalmente:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{G_1}{G_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_1} \cdot \frac{l_{c0}}{l_{c1}}}$$

Ec. 131

Particularizando para los modelos eje-rueda $\rho_I = 2,81 \text{ g/cm}^3$, $\rho_0 = 7,8 \text{ g/cm}^3$ y $l_{c0}/l_{c1} = 6/1$. G_0 y G_1 se calculan con la expresión (53) utilizando para el modelo de acero $E_0 = 210 \text{ GPa}$ y $\nu_0 = 0,3$. Para el aluminio $E_I = 72 \text{ GPa}$ y $\nu_I = 0,3$.

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{72 \text{ GPa}}{210 \text{ GPa}} \quad \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{7,8 \text{ g/cm}^3}{2,81 \text{ g/cm}^3} \quad \frac{l_{c0}}{l_{c1}} = 6 \quad \frac{G_1}{G_0} = \frac{27 \text{ GPa}}{80 \text{ GPa}}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 5,77$$

Resumiendo lo expuesto hasta ahora las expresiones teóricas de las relaciones de semejanza son:

Modos longitudinales:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{E_1}{E_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_1} \cdot \frac{l_{c0}}{l_{c1}}}$$

Ec. 132

Modos transversales:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \left(\frac{l_{c0}}{l_{c1}} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E_1 I_1 \rho_0 A_0}{E_0 I_0 \rho_1 A_1}}$$

Ec. 133

Modos torsionales:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{G_1}{G_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_1} \cdot \frac{l_{c0}}{l_{c1}}}$$

Ec. 134

Finalmente se dispone de las relaciones de semejanza teóricas de los modos longitudinales, transversales y torsionales:

$$\text{Longitudinal } \frac{\omega_1}{\omega_0} = 5,85 \quad \text{Transversal } \frac{\omega_1}{\omega_0} = 5,85 \quad \text{Torsional } \frac{\omega_1}{\omega_0} = 5,78$$

2.4.3 Comparación de las relaciones de semejanza de los modelos y teóricas

Con las relaciones de semejanza teóricas se está en disposición de valorar la validez del análisis dimensional. Para realizar dicha valoración se ha seguido el siguiente procedimiento. En primer lugar se han obtenido mediante ABAQUS los cuarenta primeros modos de vibración del modelo escala 1:1 y 1:6. En segundo lugar se han clasificado los modos de vibración según sean longitudinal, transversal o torsional. Posteriormente se han calculado las razones entre las frecuencias de los modelos 1:1 y 1:6 entre modos de vibración análogos. Por último se ha calculado la diferencia entre la relación de semejanza de los modelos y la teórica. Esta diferencia no se muestra en valor absoluto y se expresa como su razón porcentual respecto del valor teórico.

$$\text{Diferencia \%} = \left(\frac{\frac{\omega_1}{\omega_{0real}} - \frac{\omega_1}{\omega_{0teórica}}}{\frac{\omega_1}{\omega_{0teórica}}} \right) \cdot 100$$

Ec. 135

Los resultados se muestran a continuación.

Modos longitudinales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1 / ω_0 real	Diferencia %
18	10194	1735	5,876	0,608
25	19487	3319	5,871	0,537
31	28263	4796	5,893	0,908
33	28781	4907	5,865	0,433
44	37886	6463	5,862	0,376
48	46543	7957	5,849	0,160
56	54510	9342	5,835	0,087

Tabla 30. Comparación relaciones de semejanza de modos longitudinales.

Modos transversales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1 / ω_0 real	Diferencia %
3	312	53	5,887	0,629
4	346	59	5,864	0,246
5	740	126	5,873	0,393
6	1875	319	5,878	0,474
7	2230	381	5,853	0,052
8	2426	413	5,874	0,412
9	5061	863	5,864	0,247
12	8526	1448	5,888	0,652
14	8641	1469	5,882	0,551
16	9152	1562	5,859	0,156
20	13900	2375	5,853	0,045
23	19066	3261	5,847	0,057
29 (Al) 28 (Acero)	24527	4213	5,822	0,483
34	29229	5002	5,843	0,112
36	29455	5025	5,862	0,200
38	30156	5163	5,841	0,157

Tabla 31. Comparación relaciones de semejanza de modos transversales.

Modos torsionales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1 / ω_0 real	Diferencia %
2	132,75	22,89	5,799	0,337
11	6134	1059	5,792	0,212
19	12265	2117	5,794	0,235
22	18383	3174	5,792	0,203
26	20395	3513	5,806	0,443
28 (Al) 30 (Acero)	24499	4230	5,792	0,203
40	30607	5285	5,791	0,195

Tabla 32. Comparación relaciones de semejanza de modos torsionales.

En la Tabla 28 se observa que la ecuación de la frecuencia natural para una viga bi-apoyada tiene una forma diferente al caso de sólido libre, el cual ha sido la base del cálculo teórico. Por otro lado la ecuación de la frecuencia natural si se parece a las de los demás casos. Esto hace pensar que a pesar de que las diferencias son pequeñas en los cálculos anteriores, es preciso tener en cuenta cuales son las diferencias considerando el caso de sólido libre. Para fundamentar el uso de condiciones de contorno de sólido libre en el cálculo teórico de las relaciones de semejanza, se ha realizado el cálculo con ABAQUS de los modos de vibración de los modelos a escala 1:1 y 1:6 con condiciones de contorno de sólido libre. Posteriormente se han calculado las relaciones de semejanza reales y comparadas con las teóricas de la misma manera que en el caso anterior.

Modos longitudinales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1 / ω_0 real	Diferencia %
14	2592,2	440,7	5,882	0,719
24	10373	1759,4	5,896	0,955
31	19666	3335,7	5,896	0,952
37	28625	4823	5,935	1,628
39	29092	4930,4	5,901	1,037

Tabla 33. Comparación relaciones de semejanza de modos torsionales sólido libre.

Modos transversales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1 / ω_0 real	Diferencia %
8	346,62	59,028	5,872	0,378
10	748,62	127,02	5,894	0,747
12	2274,7	385,81	5,896	0,785
15	5275,8	896,51	5,885	0,595
18	8740,6	1477,2	5,917	1,145
20	8755,4	1478,5	5,922	1,228
26	14075	2399,5	5,866	0,270
29	19238	3282,7	5,860	0,178
34	24512	4216	5,814	0,615
40	29788	5046,4	5,903	0,903
42	29822	5051,7	5,903	0,912
44	30330	5182,7	5,852	0,037

Tabla 34. Comparación relaciones de semejanza de modos transversales sólido libre.

Modos torsionales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1 / ω_0 real	Diferencia %
7	240,96	41,545	5,800	0,346
17	6147,7	1060,7	5,796	0,275
25	12267	2115,2	5,799	0,337
28	18414	3175,7	5,798	0,318
32	20479	3523,4	5,812	0,559
36	24706	4227,6	5,844	1,107
46	30648	5286,4	5,798	0,303

Tabla 35. Comparación relaciones de semejanza de modos torsionales sólido libre.

2.4.4 Resumen de los resultados

Tras la observación de los resultados, se llega a la conclusión de que el uso de las expresiones teóricas de las relaciones de semejanza utilizando condiciones de contorno de sólido libre, son perfectamente válidas para las condiciones de contorno utilizadas en los modelos a escala 1:1 y 1:6. Las diferencias entre las razones de las frecuencias reales con las teóricas en ambos tipos de condiciones de contorno están en torno al 1 %. Que por tanto comprobada la validez del análisis dimensional con las hipótesis utilizadas y para cualquier tipo de modo de vibración.

Capítulo 3

Aplicación del análisis dimensional en Process Compensated Resonance Testing.

3.1 Planteamiento del problema

En el capítulo anterior se ha demostrado que mediante el uso del análisis dimensional, se pueden conocer las frecuencias naturales de los modos de vibración de un eje ferroviario, a partir de las frecuencias obtenidas del ensayo de un modelo a escala. Los resultados constataron que la desviación de los valores teóricos respecto de los reales es del orden del 1 %, lo cual da gran confiabilidad al método. La desviación de los resultados es claramente pequeña. Sin embargo un valor se califica de grande o pequeño dentro de un contexto. En el presente capítulo el objetivo es valorar si es aplicable el análisis dimensional en un contexto concreto, el Process Compensated resonance Testing (PCRT). El PCRT como se ha explicado en el primer capítulo es una técnica que permite detectar defectos en componentes mecánicos muy variados. El principio de funcionamiento se basa en las diferencias existentes entre el análisis modal de un componente mecánico que se considera sin defectos, y otro que tiene alguna clase de defecto. Los defectos modifican la rigidez del componente y altera por tanto los modos de vibración. Lógicamente una de las limitaciones del PCRT es que solo detecta defectos que modifiquen la rigidez del componente.

En este caso se valorará el uso del PCRT para la detección de una fisura en el eje ferroviario. El planteamiento consiste en realizar un hipotético ensayo de un modelo a escala del eje y determinar cómo se modifican los modos de vibraciones según crece una fisura debido a la fatiga. Posteriormente mediante el uso del análisis dimensional se extrapolaría la evolución de los modos de vibración del modelo a escala al modelo real. La clave de este uso del PCRT es que las variaciones de las frecuencias sean mayores que las diferencias entre la relación de semejanza real y la teórica. Esta diferencia se ve afectada, además de por los mismos efectos de simplificación de geometría, condiciones de contorno etc. que en el segundo capítulo, por la propia la variación de la rigidez debida al defecto en la que se basa el PCRT.

Con el fin de comprobar si es factible realizar el mencionado ensayo, se han comparado las frecuencias de los modos de vibración del modelo eje rueda a escala 1:1 sin defecto con los del modelo 1:1 incluyéndole en la geometría un fisura. De la misma forma se ha procedido con el modelo a escala 1:6. Para comparar los resultados se ha calculado la diferencia porcentual como se hizo en la subsección 2.4.3. A continuación se han calculado las relaciones de semejanza con las frecuencias de los resultados de los modelos 1:1 y 1:6 y comparadas con las teóricas calculando la diferencia porcentual. La comprobación consiste en comparar las diferencias entre los modelos con fisura y sin fisura con las diferencias entre las relaciones de semejanza reales con las teóricas.

El defecto incluido en el modelo es una fisura. Se ha decidido incluir una fisura por ser un defecto habitual causado por la fatiga del material y de gran importancia tanto para la vida operativa del componente o como para la seguridad en el transporte ferroviario. La manera empleada para incluir una fisura en el modelo es crear una

discontinuidad en el eje conforma de circunferencia. La selección de una circunferencia se basa en que es una de las formas geométricas básicas que más se parecen a las fisuras típicas en los ejes. Para observar con claridad la modificación de las frecuencias de los modos de vibración se ha pretendido que las variaciones sean grandes en la medida de lo posible. Asumiendo que cuanto mayor sea la fisura mayor es la variación de la rigidez y por tanto mayor es la variación de las frecuencias, se ha optado por que el tamaño de la fisura sea grande. El diámetro de la circunferencia que genera la superficie afectada por la fisura, es el 90 % del diámetro de la sección central del eje. La penetración de la fisura es del 80 % del radio de la sección central del eje.

Las condiciones de contorno utilizadas serán las mismas que las empleadas en el segundo capítulo, nodos de contacto de las ruedas sin desplazamientos lineales pero con libertad de giro en todos los ejes. De la misma forma que se trató en dicho capítulo las relaciones de semejanza teóricas se obtiene utilizando como condiciones de contorno de sólido libre. Como consecuencia, al igual que se hizo anteriormente se han realizado los cálculos también para condiciones de contorno de sólido libre para confirmar la fiabilidad de las conclusiones.

Otro aspecto importante es la colocación de la fisura. A priori es difícil saber donde aparecerá una fisura, en todo caso se puede estimar donde es más probable que aparezca. En este caso nos vamos a centrar a la aparición de fisuras en la sección central del eje, ignorando lo que pase más allá de los asientos de rueda. También se puede prever que dependiendo de donde se encuentre la fisura afectara más a unos modos que a otros, dependiendo de cómo sean sus desplazamientos. En base a estas premisas se han calculado los modos de vibración en un eje con una fisura en la sección central del eje justo donde comienza el asiento de rueda (a partir de ahora se hará referencia a ella como “fisura lateral”). Se ha considerado oportuno ubicar en esa posición la fisura por que se produce un cambio de sección. En los cambios de sección se producen concentración de tensiones y los hace posiciones propensas a la aparición de fisuras. Por otro lado se han calculado también los modos de vibración con una fisura ubicada en el centro de la sección central del eje (a partir de ahora se hará referencia a ella como “fisura central”). Este cálculo se ha realizado por que la zona central sufre el desplazamiento vertical mayor de todo el eje si suponemos que las ruedas pivotan sobre los puntos de contacto. En ambos casos se han orientado las fisuras hacia “arriba”, considerando que los nodos de contacto de las ruedas se encuentran hacia “abajo”.

Dado que se ha modificado la geometría de los modelos y que las fisuras suelen requerir un mallado más fino para que los resultados sean fiables, se ha realizado un proceso de afinado de la malla para garantizar la validez del modelo. Este proceso se muestra en la siguiente sección.

3.2 Validación de los modelos 1:1 y 1:6

Para realizar la validación se han obtenido las frecuencias de los modos de vibración utilizando el modelo 1:1 con la fisura utilizando el mismo tamaño de malla que en el modelo sin fisura. A continuación se han utilizado una malla más fina en la región cercana a la fisura (unos 5cm a cada lado de la fisura). Se ha optado por usar una malla más fina solo en esa región por que los efectos de las fisuras no afectan al conjunto del elemento, y utilizar una malla más fina en todo el modelo requeriría más recursos y tiempo innecesarios para realizar los cálculos. Posteriormente se han comparado las diferencias. Este proceso se ha realizado para cada tipo de fisura y para los modelos 1:1 y 1:6 con condiciones de contorno de sólido libre. Para el modelo 1:1 el tamaño de los elementos cercanos a la fisura es de 16 mm y en el modelo 1:6 3 mm. Los demás elementos tiene el mismo tamaño que el modelo utilizado en el segundo capítulo

Modelo 1:1 acero fisura central

Modo de vibración	Frecuencia [Hz] tamaño uniforme	Frecuencia [Hz] tamaño fisura 16 mm	Diferencia %
7	41,313	41,209	0,252
8	57,036	56,8	0,414
9	59,904	58,8	0,177
10	127	126	0,795
11	127	126	0,834
12	372	370	0,489
13	385	384	0,223
14	436	435	0,204
15	895	894	0,166
16	896	895	0,137
17	1061	1060	0,066
18	1477	1476	0,068
19	1478	1477	0,047
20	1479	1478	0,034
21	1480	1478	0,142
22	1525	1521	0,243
23	1584	1582	0,126
24	1759	1759	0,023
25	2091	2088	0,143
26	2392	2390	0,088
27	2394	2395	0,029
28	3128	3119	0,291
29	3176	3173	0,085
30	3275	3271	0,110
31	3316	3315	0,018
32	3523	3518	0,153
33	3525	3518	0,210
34	4155	4148	0,176
35	4210	4206	0,097
36	4220	4216	0,095
37	4823	4823	0,000
38	4829	4829	0,008
39	4930	4930	0,008
40	5025	5020	0,103
41	5047	5043	0,087
42	5051	5049	0,034
43	5055	5052	0,067
44	5069	5066	0,065
45	5172	5167	0,102
46	5286	5284	0,045
47	6103	6095	0,131
48	6151	6146	0,078
49	6278	6272	0,102
50	6329	6322	0,109

Tabla 36. Comparación de frecuencias refinado de malla modelo 1:1 acero fisura central.

Modelo 1:1 acero fisura lateral

Modo de vibración	Frecuencia [Hz] tamaño uniforme	Frecuencia [Hz] tamaño fisura 16 mm	Diferencia %
7	41,313	41,209	0,276
8	57,036	56,8	0,702
9	59,904	58,8	0,263
10	127	126	0,718
11	127	126	0,364
12	372	370	0,717
13	385	384	0,451
14	436	435	0,121
15	895	894	1,396
16	896	895	0,241
17	1061	1060	0,248
18	1477	1476	0,068
19	1478	1477	0,068
20	1479	1478	0,122
21	1480	1478	0,101
22	1525	1521	1,517
23	1584	1582	0,247
24	1759	1759	0,496
25	2091	2088	0,201
26	2392	2390	0,881
27	2394	2395	0,835
28	3128	3119	0,089
29	3176	3173	0,352
30	3275	3271	0,110
31	3316	3315	0,418
32	3523	3518	0,153
33	3525	3518	0,125
34	4155	4148	0,477
35	4210	4206	0,493
36	4220	4216	0,187
37	4823	4823	0,050
38	4829	4829	0,048
39	4930	4930	0,058
40	5025	5020	0,063
41	5047	5043	0,073
42	5051	5049	0,071
43	5055	5052	0,075
44	5069	5066	0,033
45	5172	5167	0,213
46	5286	5284	0,086
47	6103	6095	0,572
48	6151	6146	0,052
49	6278	6272	0,181
50	6329	6322	0,690

Tabla 37. Comparación de frecuencias refinado de malla modelo 1:1 acero fisura lateral.

Modelo 1:6 aluminio fisura central

Modo de vibración	Frecuencia [Hz] tamaño uniforme	Frecuencia [Hz] tamaño fisura 3 mm	Diferencia %
7	240	239	0,267
8	335	334	0,355
9	346	345	0,272
10	749	748	0,068
11	749	748	0,167
12	2195	2190	0,205
13	2270	2267	0,137
14	2564	2564	0,012
15	5270	5266	0,083
16	5277	5273	0,072
17	6148	6147	0,011
18	8741	8737	0,041
19	8753	8743	0,110
20	8754	8756	0,026
21	8761	8761	0,002
22	8969	8956	0,148
23	9309	9299	0,104
24	10373	10372	0,010
25	12129	12120	0,074
26	14036	14027	0,064
27	14068	14061	0,050
28	18384	18358	0,141
29	18414	18415	0,005
30	19194	19177	0,089
31	19515	19512	0,015
32	20479	20422	0,278
33	20481	20509	0,137
34	24157	24145	0,050
35	24648	24635	0,053
36	24656	24646	0,041
37	28625	28622	0,010
38	28697	28694	0,010
39	29092	29088	0,014
40	29488	29461	0,092
41	29787	29744	0,144
42	29818	29791	0,091
43	29848	29812	0,121
44	29898	29853	0,151
45	30273	30263	0,033
46	30648	30649	0,003
47	35648	35626	0,062
48	35967	35961	0,017
49	36454	36446	0,022
50	37279	37257	0,059

Tabla 38. Comparación de frecuencias refinado de malla modelo 1:6 aluminio fisura central.

Modelo 1:6 aluminio fisura lateral

Modo de vibración	Frecuencia [Hz] tamaño uniforme	Frecuencia [Hz] tamaño fisura 3 mm	Diferencia %
7	240	239	0,346
8	335	338	0,492
9	346	345	0,349
10	749	702	0,641
11	749	743	0,310
12	2195	2123	0,590
13	2270	2255	0,345
14	2564	2573	0,027
15	5270	5062	0,409
16	5277	5235	0,305
17	6148	6071	0,279
18	8741	8718	0,256
19	8753	8727	0,295
20	8754	8734	0,230
21	8761	8737	0,276
22	8969	9074	0,315
23	9309	9263	0,266
24	10373	10209	0,117
25	12129	12105	0,321
26	14036	13870	0,252
27	14068	13959	0,250
28	18384	18172	0,296
29	18414	18975	0,216
30	19194	19076	0,246
31	19515	19401	0,139
32	20479	20433	0,225
33	20481	20436	0,220
34	24157	24108	0,302
35	24648	24538	0,175
36	24656	24567	0,203
37	28625	28431	0,095
38	28697	28681	0,056
39	29092	28778	0,080
40	29488	29687	0,215
41	29787	29729	0,255
42	29818	29758	0,208
43	29848	29781	0,268
44	29898	29926	0,223
45	30273	30169	0,222
46	30648	30492	0,164
47	35648	35580	0,208
48	35967	35806	0,192
49	36454	36508	0,219
50	37279	37599	0,096

Tabla 39. Comparación de frecuencias refinado de malla modelo 1:6 aluminio fisura lateral.

Los resultados muestran que las diferencias son muy pequeñas, inferiores al 1 %. Como conclusión no es necesario utilizar una malla más fina en las cercanías de la fisura. Por esta razón en los cálculos de este capítulo se usaran los mismos modelos que en el segundo capítulo.

3.3 Cálculo y comparación de resultados

Comprobada la validez de los modelos a escala 1:1 y 1:6 se han realizado los cálculos en las condiciones establecidas. Los resultados se presentan a continuación.

3.3.1 Relaciones de semejanza

En primer lugar se han calculado con las frecuencias de los modos de vibración de los modelos 1:1 y 1:6 las relaciones de semejanza para cada tipo de fisura, y se ha calculado la diferencia respecto del valor teórico. A modo de recordatorio se muestran los valores teóricos y el método de cálculo de la diferencia porcentual.

$$Diferencia \% = \left(\frac{\frac{\omega_1}{\omega_{0real}} - \frac{\omega_1}{\omega_{0teórica}}}{\frac{\omega_1}{\omega_{0teórica}}} \right) \cdot 100$$

Ec. 136

$$Longitudinal \frac{\omega_1}{\omega_0} = 5,85 \quad Transversal \frac{\omega_1}{\omega_0} = 5,85 \quad Torsional \frac{\omega_1}{\omega_0} = 5,78$$

Eje con fisura central

Modos longitudinales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1/ω_0 real	Diferencia %
18	10242	1736	5,900	1,023
25	19387	3268	5,932	1,582
31	28556	4806	5,942	1,742
33	28971	4913	5,897	0,973

Tabla 40. Comparación relaciones de semejanza de modos longitudinales eje con fisura central.

Modos transversales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1/ω_0 real	Diferencia %
3	313	53	5,906	0,951
4	344	58	5,931	1,385
5	739	125	5,912	1,060
6	1786	302	5,914	1,092
7	2239	379	5,908	0,985
8	2425	411	5,900	0,859
9	5081	863	5,888	0,643
12	8596	1450	5,928	1,338
14	8711	1473	5,914	1,090
16	8798	1495	5,885	0,597
20	13928	2373	5,869	0,331
23	18418	3175	5,801	0,839
29 (Al) 28 (Acero)	24538	4151	5,911	1,049
34	29429	5014	5,869	0,331
36	29655	5023	5,904	0,920
38	29759	5043	5,901	0,873

Tabla 41. Comparación relaciones de semejanza de modos transversales eje con fisura central.

Modos torsionales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1 / ω_0 real	Diferencia %
2	131	22,65	5,784	0,063
11	6143	1059	5,801	0,359
19	12126	2090	5,802	0,379
22	18306	3115	5,877	1,673
26	20477	3523	5,812	0,560
28 (Al) 30 (Acero)	24176	4232	5,713	1,165
40	30652	5386	5,691	1,539

Tabla 42. Comparación relaciones de semejanza de modos torsionales eje con fisura central.

Eje con fisura lateral

Modos longitudinales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1 / ω_0 real	Diferencia %
18	10078	1709	5,90	0,98
25	19295	3275	5,89	0,88
31	28454	4805	5,92	1,40
33	28609	4837	5,91	1,28

Tabla 43. Comparación relaciones de semejanza de modos longitudinales eje con fisura lateral.

Modos transversales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1 / ω_0 real	Diferencia %
3	294	49	6,00	2,56
4	344	58	5,93	1,39
5	735	124	5,93	1,32
6	1825	309	5,91	0,96
7	2232	375	5,95	1,74
8	2332	396	5,89	0,66
9	4909	834	5,89	0,62
12	8595	1450	5,93	1,33
14	8711	1473	5,91	1,09
16	8952	1524	5,87	0,41
20	13768	2347	5,87	0,28
23	18937	3228	5,87	0,28
29 (Al) 28 (Acero)	24468	4146	5,90	0,88
34	29616	5013	5,91	0,99
36	29730	5038	5,90	0,87
38	29933	5120	5,85	0,06

Tabla 44. Comparación relaciones de semejanza de modos transversales eje con fisura lateral.

Modos torsionales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1 / ω_0 real	Diferencia %
2	131	22,66	5,78	0,02
11	6082	1048	5,80	0,41
19	12142	2092	5,80	0,42
22	18226	3140	5,80	0,42
26	20471	3523	5,81	0,53
28 (Al) 30 (Acero)	24176	4217	5,73	0,81
40	30526	5257	5,81	0,46

Tabla 45. Comparación relaciones de semejanza de modos torsionales eje con fisura lateral.

A continuación se muestran los resultados para condiciones de contorno de sólido libre.

Eje con fisura central sólido libre

Modos longitudinales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1 / ω_0 real	Diferencia %
14	2564,3	435,89	5,883	0,735
24	10373	1759,4	5,896	0,955
31	19515	3315,6	5,886	0,784
37	28625	4823	5,935	1,628
39	29092	4930,4	5,901	1,037

Tabla 46. Comparación relaciones de semejanza de modos longitudinales eje con fisura central sólido libre.

Modos transversales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1 / ω_0 real	Diferencia %
8	335,19	57,036	5,877	0,458
10	748,51	127,01	5,893	0,740
12	2194,5	371,82	5,902	0,890
15	5270,4	895,49	5,885	0,607
18	8740,6	1477	5,918	1,159
20	8753,7	1478,5	5,921	1,208
26	14036	2392,1	5,868	0,302
29	18414	3175,7	5,798	0,882
34	24157	4155,3	5,814	0,623
40	29818	5050,7	5,904	0,919
42	29822	5051,7	5,903	0,912
44	29898	5069,3	5,898	0,818

Tabla 47. Comparación relaciones de semejanza de modos transversales eje con fisura central

sólido libre.

Modos torsionales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1 / ω_0 real	Diferencia %
7	239,64	41,313	5,801	0,356
17	6147,7	1060,7	5,796	0,275
25	12129	2091	5,801	0,356
28	18384	3128,1	5,877	1,679
32	20479	3523,4	5,812	0,559
36	24656	4220	5,843	1,084
46	30648	5286,4	5,798	0,303

Tabla 48. Comparación relaciones de semejanza de modos torsionales eje con fisura central sólido libre.

Fisura lateral sólido libre

Modos longitudinales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1 / ω_0 real	Diferencia %
14	2573,7	437,53	5,882	0,725
24	10221	1733,6	5,896	0,956
31	19428	3299,8	5,888	0,816
37	28458	4813,4	5,912	1,237
39	28801	4863,8	5,922	1,396

Tabla 49. Comparación relaciones de semejanza de modos longitudinales eje con fisura lateral sólido libre.

Modos transversales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1 / ω_0 real	Diferencia %
8	339,67	57,806	5,876	0,445
10	706,53	119,86	5,895	0,763
12	2135,6	362,4	5,893	0,734
15	5082,8	863,94	5,883	0,569
18	8740,4	1477	5,918	1,157
20	8754,1	1477,8	5,924	1,260
26	13905	2360,2	5,891	0,709
29	19016	3240,6	5,868	0,309
34	24181	4152,2	5,824	0,450
40	29751	5045,2	5,897	0,802
42	29820	5051,6	5,903	0,907
44	29993	5128,3	5,849	0,025

Tabla 50. Comparación relaciones de semejanza de modos transversales eje con fisura lateral sólido libre.

Modos torsionales

Modo	ω_1 Aluminio 1:6 [Hz]	ω_1 Acero 1:1 [Hz]	ω_1 / ω_0 real	Diferencia %
7	239,83	41,327	5,803	0,402
17	6088	1049,6	5,800	0,351
25	12144	2093,2	5,802	0,374
28	18226	3140,2	5,804	0,417
32	20479	3523,4	5,812	0,559
36	24617	4221,9	5,831	0,879
46	30542	5259,5	5,807	0,467

Tabla 51. Comparación relaciones de semejanza de modos torsionales eje con fisura lateral sólido libre.

Se puede observar que la existencia de fisuras no ha variado sustancialmente la discrepancia entre el valor real y el teórico, se mantiene en torno al 1 % en todos los modos analizados. Esto es aplicable tanto en la fisura lateral como en la central

3.3.2 Diferencia en las frecuencias debido a las fisuras

En la subsección anterior se ha comprobado que las relaciones de semejanza teóricas siguen proporcionando resultados fiables de las frecuencias naturales entre un modelo a escala y uno real, a pesar de tener una fisura con un 80 % de penetración en el radio en el centro del eje o bien cerca del asiento de rueda. A continuación se han calculado las diferencias porcentuales entre las frecuencias del eje con fisura y sin fisura.

Modelo a escala 1:1 acero con fisura central

Modo	ω_n Sin fisura [Hz]	ω_n Fisura central [Hz]	Diferencia %
2	22,805	22,657	0,649
3	53	53	0,000
4	58	58	0,000
5	125	125	0,000
6	319	302	5,329
7	381	379	0,525
8	412	411	0,243
9	864	863	0,116
10	891	889	0,224
11	1060	1059	0,094
12	1450	1450	0,000
13	1452	1452	0,000
14	1471	1473	0,136
15	1473	1474	0,068
16	1564	1495	4,412
17	1585	1577	0,505
18	1737	1736	0,058
19	2118	2090	1,322
20	2377	2373	0,168
21	2396	2386	0,417
22	3175	3115	1,890
23	3264	3175	2,727
24	3281	3268	0,396
25	3323	3292	0,933
26	3515	3523	0,228
27	3522	3525	0,085
28	4200	4151	1,167
29	4217	4189	0,664
30	4232	4217	0,354
31	4806	4806	0,000
32	4807	4807	0,000
33	4914	4913	0,020
34	5011	5014	0,060
35	5013	5015	0,040
36	5034	5023	0,219
37	5041	5038	0,060
38	5168	5043	2,419
39	5184	5163	0,405
40	5287	5386	1,873

Tabla 52. Diferencia de frecuencias debido a la fisura central modelo 1:1acero.

Modelo a escala 1:1 acero con fisura lateral

Modo	ω_n Sin fisura [Hz]	ω_n Fisura lateral [Hz]	Diferencia %
2	22,805	22,66	0,636
3	53	49	7,547
4	58	58	0,000
5	125	124	0,800
6	319	309	3,135
7	381	375	1,575
8	412	396	3,883
9	864	834	3,472
10	891	885	0,673
11	1060	1048	1,132
12	1450	1450	0,000
13	1452	1452	0,000
14	1471	1473	0,136
15	1473	1474	0,068
16	1564	1524	2,558
17	1585	1574	0,694
18	1737	1709	1,612
19	2118	2092	1,228
20	2377	2347	1,262
21	2396	2378	0,751
22	3175	3140	1,102
23	3264	3228	1,103
24	3281	3258	0,701
25	3323	3275	1,444
26	3515	3523	0,228
27	3522	3525	0,085
28	4200	4146	1,286
29	4217	4177	0,949
30	4232	4217	0,354
31	4806	4805	0,021
32	4807	4807	0,000
33	4914	4837	1,567
34	5011	5013	0,040
35	5013	5015	0,040
36	5034	5038	0,079
37	5041	5043	0,040
38	5168	5120	0,929
39	5184	5139	0,868
40	5287	5257	0,567

Tabla 53. Diferencia de frecuencias debido a la fisura lateral modelo 1:1 acero.

Modelo a escala 1:6 aluminio con fisura central

Modo	ω_n Sin fisura [Hz]	ω_n Fisura central [Hz]	Diferencia %
2	132	131	0,758
3	312	313	0,321
4	346	344	0,578
5	740	739	0,135
6	1875	1786	4,747
7	2239	2239	0,000
8	2426	2425	0,041
9	5061	5081	0,395
10	5223	5234	0,211
11	6134	6143	0,147
12	8526	8596	0,821
13	8537	8604	0,785
14	8641	8711	0,810
15	8643	8723	0,926
16	9152	8798	3,868
17	9279	9268	0,119
18	10194	10242	0,471
19	12265	12126	1,133
20	13900	13928	0,201
21	14013	14000	0,093
22	18383	18306	0,419
23	19066	18418	3,399
24	19179	19158	0,109
25	19487	19387	0,513
26	20395	20477	0,402
27	20397	20479	0,402
28	24499	24147	1,437
29	24527	24538	0,045
30	24632	24627	0,020
31	28263	28556	1,037
32	28270	28570	1,061
33	28781	28971	0,660
34	29299	29424	0,427
35	29352	29617	0,903
36	29455	29655	0,679
37	29484	29745	0,885
38	30156	29759	1,316
39	30254	30217	0,122
40	30607	30652	0,147

Tabla 54. Diferencia de frecuencias debido a la fisura central modelo 1:6 aluminio.

Modelo a escala 1:6 aluminio con fisura lateral

Modo	ω_n Sin fisura [Hz]	ω_n Fisura lateral [Hz]	Diferencia %
2	132	131	0,758
3	312	294	5,769
4	346	344	0,578
5	740	735	0,676
6	1875	1825	2,667
7	2239	2232	0,313
8	2426	2332	3,875
9	5061	4909	3,003
10	5223	5213	0,191
11	6134	6082	0,848
12	8526	8595	0,809
13	8537	8604	0,785
14	8641	8711	0,810
15	8643	8723	0,926
16	9152	8952	2,185
17	9279	9247	0,345
18	10194	10078	1,138
19	12265	12142	1,003
20	13900	13768	0,950
21	14013	13955	0,414
22	18383	18226	0,854
23	19066	18937	0,677
24	19179	19084	0,495
25	19487	19295	0,985
26	20395	20477	0,402
27	20397	20479	0,402
28	24499	24176	1,318
29	24527	24468	0,241
30	24632	24584	0,195
31	28263	28454	0,676
32	28270	28569	1,058
33	28781	28609	0,598
34	29299	29616	1,082
35	29352	29654	1,029
36	29455	29730	0,934
37	29484	29758	0,929
38	30156	29933	0,739
39	30254	30082	0,569
40	30607	30526	0,265

Tabla 55. Diferencia de frecuencias debido a la fisura lateral modelo 1:6 aluminio.

Para garantizar la validez del uso de la relación de semejanza basada en condiciones de contorno de sólido libre, se han calculado también las frecuencias de los modos de vibración de los modelos como sólidos libre.

Modelo a escala 1:1 acero con fisura central sólido libre

Modo	ω_n Sin fisura [Hz]	ω_n Fisura central [Hz]	Diferencia %
7	41,545	41,313	0,558
8	59,028	57,036	3,375
9	59,066	58,904	0,274
10	127,02	127,01	0,008
11	127,08	127,06	0,016
12	385,81	371,82	3,626
13	385,92	384,86	0,275
14	440,7	435,89	1,091
15	896,51	895,49	0,114
16	896,8	896,23	0,064
17	1060,7	1060,7	0,000
18	1477,2	1477	0,014
19	1477,8	1477,7	0,007
20	1478,5	1478,5	0,000
21	1480,1	1480,1	0,000
22	1588,8	1524,7	4,034
23	1589,6	1584	0,352
24	1759,4	1759,4	0,000
25	2115,2	2091	1,144
26	2399,5	2392,1	0,308
27	2399,9	2394,3	0,233
28	3175,7	3128,1	1,499
29	3282,7	3175,7	3,260
30	3283,8	3274,6	0,280
31	3335,7	3315,6	0,603
32	3523,4	3523,4	0,000
33	3525,4	3525,4	0,000
34	4216	4155,3	1,440
35	4218,2	4210,1	0,192
36	4227,6	4220	0,180
37	4823	4823	0,000
38	4829,5	4829,4	0,002
39	4930,4	4930,4	0,000
40	5046,4	5025,2	0,420
41	5048,5	5047,4	0,022
42	5051,7	5050,7	0,020
43	5056,2	5055,4	0,016
44	5182,7	5069,3	2,188
45	5184,4	5172,3	0,233
46	5286,4	5286,4	0,000
47	6162,6	6103	0,967
48	6164,5	6150,8	0,222
49	6335,2	6278,4	0,897
50	6483,4	6328,9	2,383

Tabla 56. Diferencia de frecuencias debido a la fisura central modelo 1:1 acero sólido libre.

Modelo a escala 1:1 acero con fisura lateral sólido libre

Modo	ω_n Sin fisura [Hz]	ω_n Fisura lateral [Hz]	Diferencia %
7	41,545	41,327	0,525
8	59,028	57,806	2,070
9	59,066	58,955	0,188
10	127,02	119,86	5,637
11	127,08	126,46	0,488
12	385,81	362,4	6,068
13	385,92	383,73	0,567
14	440,7	437,53	0,719
15	896,51	863,94	3,633
16	896,8	892,15	0,519
17	1060,7	1049,6	1,046
18	1477,2	1477	0,014
19	1477,8	1477	0,054
20	1478,5	1477,8	0,047
21	1480,1	1478,5	0,108
22	1588,8	1549,5	2,474
23	1589,6	1580,9	0,547
24	1759,4	1733,6	1,466
25	2115,2	2093,2	1,040
26	2399,5	2360,2	1,638
27	2399,9	2370,2	1,238
28	3175,7	3140,2	1,118
29	3282,7	3240,6	1,282
30	3283,8	3264,6	0,585
31	3335,7	3299,8	1,076
32	3523,4	3523,4	0,000
33	3525,4	3525,4	0,000
34	4216	4152,2	1,513
35	4218,2	4197,7	0,486
36	4227,6	4221,9	0,135
37	4823	4813,4	0,199
38	4829,5	4829,3	0,004
39	4930,4	4863,8	1,351
40	5046,4	5045,2	0,024
41	5048,5	5047,7	0,016
42	5051,7	5051,6	0,002
43	5056,2	5055,8	0,008
44	5182,7	5128,3	1,050
45	5184,4	5164	0,393
46	5286,4	5259,5	0,509
47	6162,6	6103,9	0,953
48	6164,5	6133,8	0,498
49	6335,2	6302,6	0,515
50	6483,4	6393,9	1,380

Tabla 57. Diferencia de frecuencias debido a la fisura lateral modelo 1:1 acero sólido libre.

Modelo a escala 1:6 aluminio con fisura central sólido libre

Modo	ω_n Sin fisura [Hz]	ω_n Fisura central [Hz]	Diferencia %
7	240,96	239,64	0,548
8	346,62	335,19	3,298
9	346,93	345,94	0,285
10	748,62	748,51	0,015
11	749,35	749,25	0,013
12	2274,7	2194,5	3,526
13	2276,9	2270,1	0,299
14	2592,2	2564,3	1,076
15	5275,8	5270,4	0,102
16	5280,7	5276,8	0,074
17	6147,7	6147,7	0,000
18	8740,6	8740,6	0,000
19	8752,9	8752,6	0,003
20	8755,4	8753,7	0,019
21	8761,5	8760,8	0,008
22	9336,4	8969,3	3,932
23	9342	9308,7	0,356
24	10373	10373	0,000
25	12267	12129	1,125
26	14075	14036	0,277
27	14087	14068	0,135
28	18414	18384	0,163
29	19238	18414	4,283
30	19249	19194	0,286
31	19666	19515	0,768
32	20479	20479	0,000
33	20481	20481	0,000
34	24512	24157	1,448
35	24685	24648	0,150
36	24706	24656	0,202
37	28625	28625	0,000
38	28698	28697	0,003
39	29092	29092	0,000
40	29788	29488	1,007
41	29814	29787	0,091
42	29822	29818	0,013
43	29863	29848	0,050
44	30330	29898	1,424
45	30344	30273	0,234
46	30648	30648	0,000
47	36031	35648	1,063
48	36045	35967	0,216
49	36736	36454	0,768
50	38190	37279	2,385

Tabla 58. Diferencia de frecuencias debido a la fisura central modelo 1:1 aluminio sólido libre.

Modelo a escala 1:6 aluminio con fisura lateral sólido libre

Modo	ω_n Sin fisura [Hz]	ω_n Fisura central [Hz]	Diferencia %
7	240,96	239,83	0,469
8	346,62	339,67	2,005
9	346,93	346,21	0,208
10	748,62	706,53	5,622
11	749,35	745,31	0,539
12	2274,7	2135,6	6,115
13	2276,9	2262,8	0,619
14	2592,2	2573,7	0,714
15	5275,8	5082,8	3,658
16	5280,7	5251	0,562
17	6147,7	6088	0,971
18	8740,6	8740,4	0,002
19	8752,9	8752,8	0,001
20	8755,4	8754,1	0,015
21	8761,5	8761,2	0,003
22	9336,4	9102,7	2,503
23	9342	9287,7	0,581
24	10373	10221	1,465
25	12267	12144	1,003
26	14075	13905	1,208
27	14087	13994	0,660
28	18414	18226	1,021
29	19238	19016	1,154
30	19249	19123	0,655
31	19666	19428	1,210
32	20479	20479	0,000
33	20481	20481	0,000
34	24512	24181	1,350
35	24685	24581	0,421
36	24706	24617	0,360
37	28625	28458	0,583
38	28698	28697	0,003
39	29092	28801	1,000
40	29788	29751	0,124
41	29814	29805	0,030
42	29822	29820	0,007
43	29863	29861	0,007
44	30330	29993	1,111
45	30344	30236	0,356
46	30648	30542	0,346
47	36031	35654	1,046
48	36045	35875	0,472
49	36736	36588	0,403
50	38190	37635	1,453

Tabla 59. Diferencia de frecuencias debido a la fisura lateral modelo 1:1 aluminio sólido libre.

No se puede establecer un patrón claro para todos los modos. Se puede afirmar que las diferencias de frecuencias están en torno al 1% pero en algunos modos las superan y en otros es inferior. Estos resultados son del mismo orden que el margen de error derivado del uso de las relaciones de semejanza teóricas. Por esta razón se afirma que no es posible aplicar el análisis dimensional tal y como se ha planteado en el segundo capítulo.

Capítulo 4

Conclusiones y trabajos futuros.

4.1 Conclusiones

En el segundo capítulo se ha explicado el desarrollo teórico para obtener las relaciones de semejanza entre ejes ferroviarios de diferente escala, a partir de la teoría de vibraciones de medios para vigas esbeltas. A su vez en el mismo capítulo se ha desarrollado el proceso de obtención de los modos de vibración de un eje a escala real y otro a escala 1:6 haciendo uso del programa de elementos finitos “ABAQUS”. Al final de este capítulo se han determinado las relaciones de semejanza a partir de estos resultados y comparadas con las relaciones de semejanza teóricas.

En el tercer capítulo se muestra como se ha utilizado nuevamente “ABAQUS” para obtener las frecuencias naturales de un modelo de eje sin defectos y otro eje con una fisura. Con los resultados se ha determinado en qué medida modifica la fisura las frecuencias naturales del eje. Esto se ha realizado tanto para los ejes con y sin fisura a escala real como a escala 1:6. La motivación de este análisis es comprobar la posibilidad de utilizar el análisis dimensional en el calibrado o puesta en marcha de un sistema de inspección basado en PCRT. Por último se valoró si las relaciones de semejanza teóricas obtenidas en el segundo capítulo permiten obtener los resultados de los modelos a escala 1:1 a partir de los de escala 1:6.

Después de lo expuesto en ambos capítulos, las conclusiones a las que se llegan son:

- Las expresiones de las relaciones de semejanza entre ejes ferroviarios basadas en la teoría de vibraciones de medios continuos para vigas esbeltas son:

Modos longitudinales:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{E_1}{E_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_1} \cdot \frac{l_{c0}}{l_{c1}}}$$

Modos transversales:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \left(\frac{l_{c0}}{l_{c1}}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E_1}{E_0} \cdot \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_1} \cdot \frac{A_0}{A_1}}$$

Modos torsionales:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{G_1}{G_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_1} \cdot \frac{l_{c0}}{l_{c1}}}$$

Donde ω es la frecuencia natural, E el módulo elástico del material, ρ la densidad del material, l la longitud característica, A el área de la sección

transversal, I el momento de inercia de la sección transversal y G el módulo de cortadura del material.

- La diferencia entre las relaciones de semejanza obtenidas a partir de los resultados del programa “ABAQUS”, y las relaciones de semejanza teóricas son cercanas al 1% para los modos estudiados. Por esta razón queda probado que es aplicable el análisis dimensional empleando relaciones de semejanza basadas en la teoría de vibraciones mecánicas para vigas esbeltas.
- Las diferencias entre las frecuencias naturales de un eje sin defectos y otro con una fisura, tanto entre ejes a escala real y ejes a escala 1:6, están en torno al 1 % para los modos estudiados. Sin embargo el error cometido al utilizar las relaciones de semejanza teóricas son también cercanas al 1%. En virtud de lo explicado en la subsección 1.6.4 el error mínimo en la determinación de las frecuencias naturales del sistema que se considera aceptable, debe ser el orden de 0,001 %. En caso contrario los algoritmos utilizados para realizar la compensación no podrán lograr un margen de entre 0,003 y 0,3%, el cual permite tener la fiabilidad en la identificación de defectos esperada de este ensayo no destructivo. Se concluye que no se puede demostrar mediante las hipótesis y herramientas empleadas en este proyecto, la validez de análisis dimensional con el fin de conocer la desviación de las frecuencias naturales de un eje debido a la presencia de fisuras, necesaria en ensayos PCRT.

4.2 Futuros trabajos

Ante las conclusiones recogidas tras el análisis de los resultados se hace patente la necesidad de realizar estudios más profundos en la materia. Como se ha comentado en el apartado de conclusiones, se presentan dudas en el uso del análisis dimensional en ensayos PCRT. Hay numerosas causas que han podido influir en los resultados y condicionar las conclusiones. Estas causas merecen ser objeto de estudio en futuros trabajos que permitan llegar a resultados concluyentes. A continuación se muestra una breve lista de posibles causas a tener en cuenta en futuros trabajos.

- En los resultados del tercer capítulo se observa que las diferencias en las frecuencias pueden ser muy diferentes entre los distintos modos de vibración. Este hecho sugiere que quizás haya que realizar un análisis más particularizado en los distintos modos en vez de de uno más general.
- En relación con lo anterior la posición de las fisuras puede variar sustancialmente los resultados ya que habrá modos que se vean más afectados que otros dependiendo de donde se encuentre esta. También el tamaño y la forma de la fisura considerada en el estudio puede alterar los resultados.

- El programa de elementos finitos “ABAQUS” en el cálculo de los modos de vibración no tiene en cuenta la interpenetración de elementos sólidos del modelo. Es decir, “ABAQUS” no considera que haya contacto entre las dos superficies libres de la fisura cuanto esta se encuentra comprimida, por lo que se introduce una respecto de la otra. Es interesante valorar en qué medida afecta esto a los resultados o buscar una herramienta de cálculo alternativa.
- Las relaciones de semejanza teóricas están basadas en la teoría de vibraciones de vigas esbeltas. Es conveniente analizar la influencia de este hecho y comparar los resultados con los obtenidos mediante relaciones de semejanza basada en la teoría de vigas gruesas en futuros trabajos.

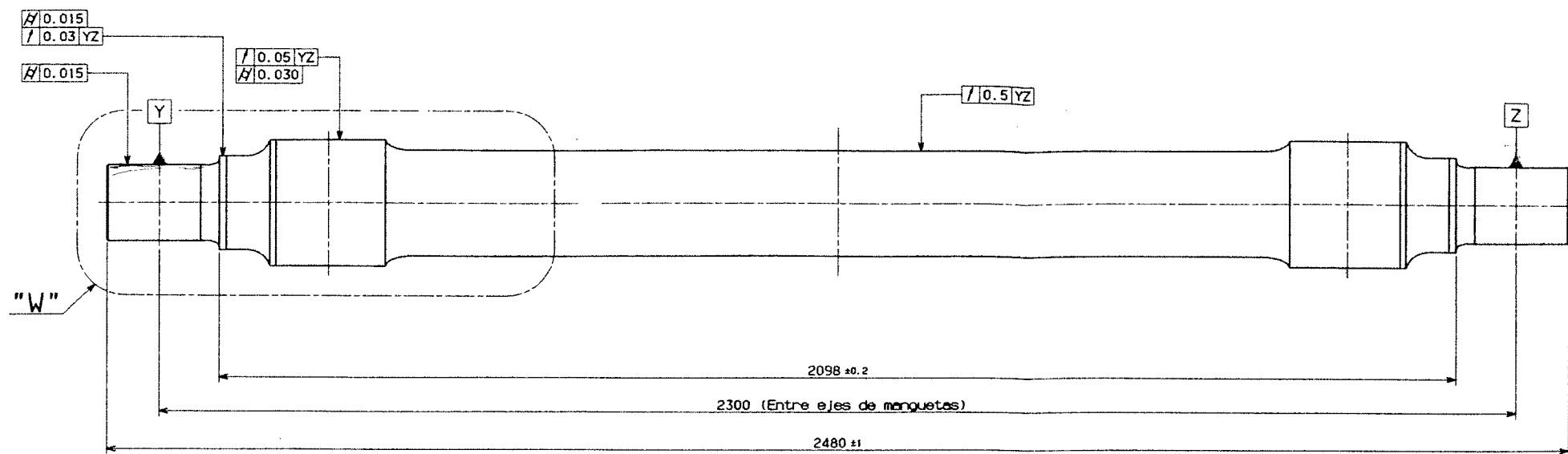
Bibliografía

- [1]. Singiresu S, Rao. “Mechanical vibrations” (Addison-Wesley, 1990, 2ª edición).
Gough, W. “Vibrations and waves” (Prentice-Hall, 1996, 2ª edición).
- [2]. Pain, Herbert John. “The physics of vibration and waves” (John Wiley & Sons, 1993, 4ª edición).
- [3]. Magnus, Kurt “Vibrations” (Blackie & Son, 1965, 4ª edición).
- [4]. Ahmed A. Shabana “Vibration of discrete and continuous systems” (Springer, 1997, 2ª edición).
- [5]. Schmitz Tony L. “Mechanical vibrations: modelling and measurement” (Springer, 2010, 1ª edición).
- [6]. Palación Julio “Análisis dimensional” (Espasa-Calpe, 1964, 1ª edición).
- [7]. Szirtes Thomas “Applied dimensional analysis and modeling” (Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2007, 2ª edición).
- [8]. Barenblatt G.I. “Dimensional analysis” (Gordon and Breach Science, 1987, 2ª edición)
- [9]. Ortiz berrocal Luis “Elasticidad” (Universidad Politécnica, Escuela técnica Superior de Ingenieros Industriales, 1985, 2ª edición).
- [10]. American Society for Testing Materials international (ASTM International), “Standard practice for Process Compensated Resonance Testing via swept sine input for metallic and non metallic parts”. (ASTM - e2534, Año publicación 2010).
- [11]. Dassault Systèmes “Abaqus user’s manual 6.10” (2010)

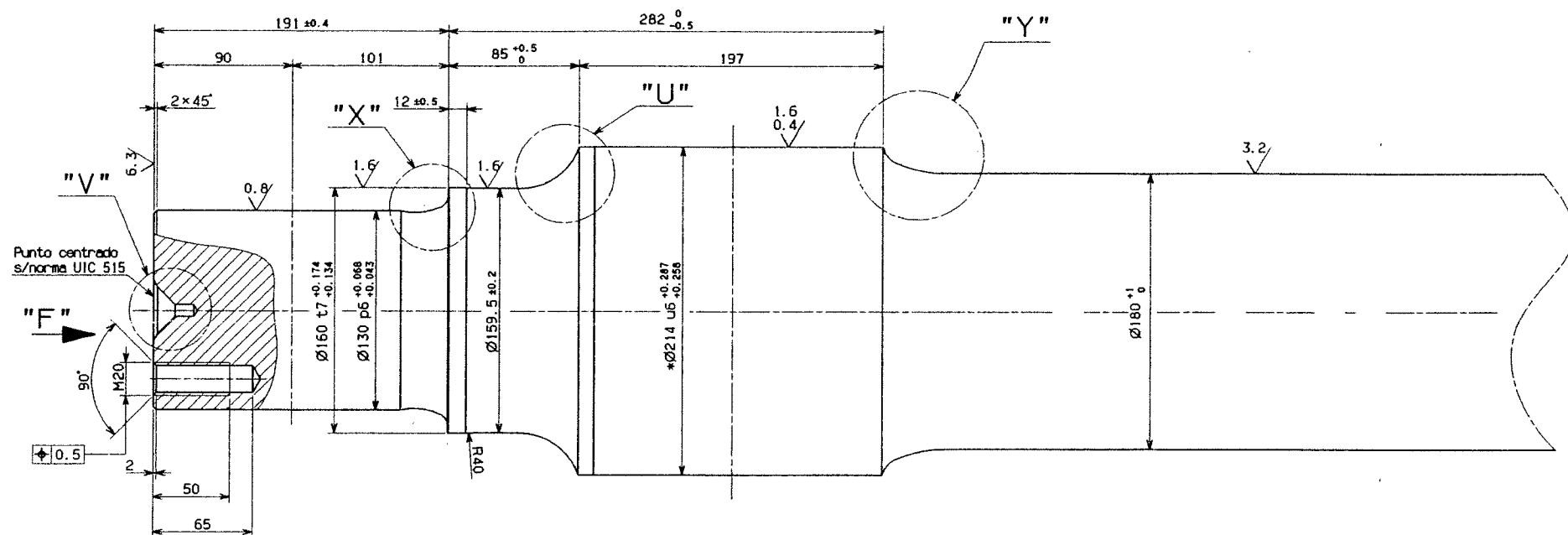
Recursos electrónicos

- [12]. <http://www.vibrantndt.com/> accedido en julio 2012
- [13]. <http://www.quasarintl.com/> accedido en julio 2012

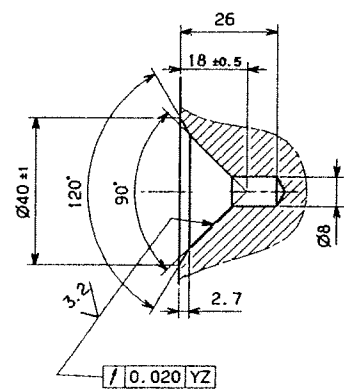
Anexos



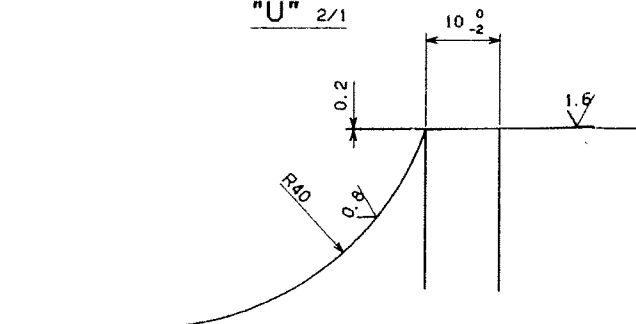
"W" (1/2)



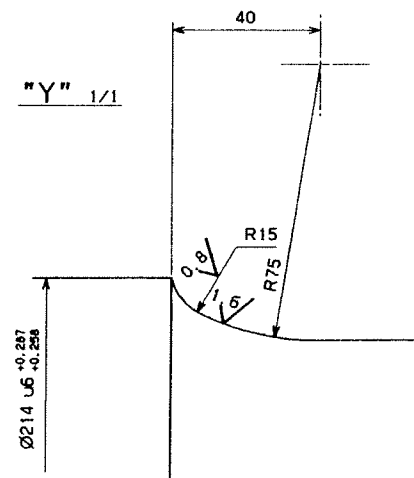
"V" 1/1



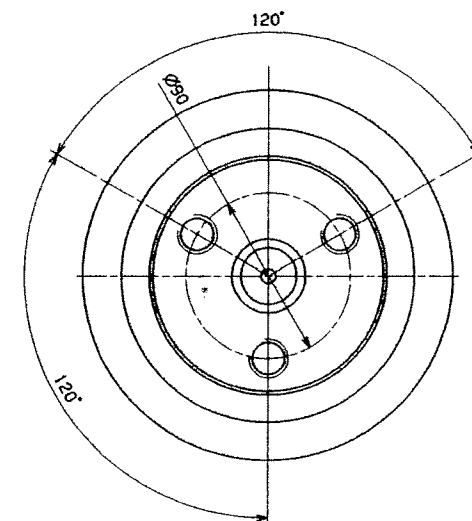
"U" 2/1



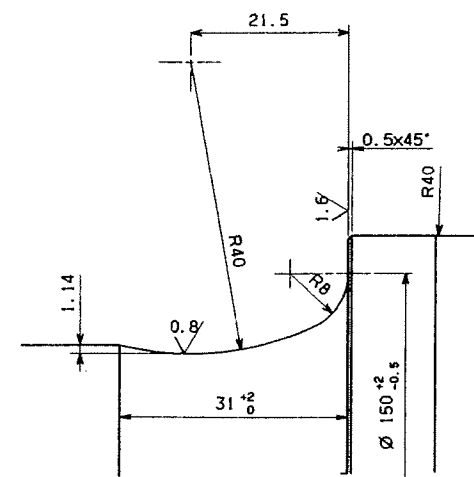
"Y" 1/1



"F" 1/2



"X" 2/1



NOTAS:

- El cuerpo de eje satisficra las condiciones definidas en la ficha UIC 811-1 y cumplira la Especificacion Tecnica de RENFE 03.373.001.1
- Cantos no especificados R=0.5
- * Limite de utilidad $\phi 209$

01 CUERPO DE EJE	I	EST	488.0
DESCRIPCION	CANT.	N° SUMINISTRADOR O N° FABRICANTE	N° DIBUJO O CALIDAD MATERIAL
MODIFICACIONES	FECHA	NOVEDADES	RENTA
A 25-04-02 Mod. toler.			
B 21-05-02 Mod. material			
C 02-06-02 Mod. material			
APLICACIONES	FECHA	NOVEDADES	RENTA
TREN CIVIL	1/5		
SUSTITUYE A:			
RENTA			
ALSTOM			
SUSTITUYE A:			